

Phys. sp.

718

R

Phys. sp. 718 $\frac{h}{c}$

Weber

DER ROTATIONSINDUKTOR
SEINE THEORIE UND SEINE ANWENDUNG
ZUR
BESTIMMUNG DES OHM
IN ABSOLUTEN MAASSEN

VON

DR. HEINRICH WEBER,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER HERZOGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

MIT ZWEI LITHOGRAPHIERTEN TAFELN UND IN DEN TEXT
GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.



Vorwort.

Die meisten Abmessungen des Induktors, mit welchem die Bestimmung des Ohms in absolutem Maasse ausgeführt wurde, lagen bereits in Millimeter, Milligramm und Sekunde vor, als der Pariser Kongress sich für Centimeter, Gramm und Sekunde als Längen-, Massen- und Zeismaass aussprach. Es wurden deshalb die erstgenannten Maasseinheiten bei den später ausgeführten Messungen beibehalten. Obgleich ursprünglich die Bestimmung der Siemensschen Einheit in Aussicht genommen war, wurde schliesslich statt seiner der Ohm substituiert. Siemens & Halske hatten die Güte, einen besonderen, etwas grösseren Etalon von $1\frac{1}{10}$ Siemens-Einheiten anzufertigen, welcher bei dem zur Vergleichung angewendeten Verfahren nötig war, doch verzögerte sich die Ablieferung und es musste infolge hiervon der Ohm, dessen Widerstand unmittelbar passend war, an seine Stelle gesetzt werden.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
Induktion eines magnetischen Punktes auf einen Ring bei Drehung des Ringes um eine zur Ringfläche parallele Axe	4
Induktion durch den Erdmagnetismus	7
Induktion durch einen Magnet	9
Induktion des Induktors auf sich selbst	14
Bestimmung der Drehungsmomente, welche der Induktor auf eine in seinem Mittelpunkt befindliche beliebig gerichtete Nadel ausübt	17
Die mittleren Drehungsmomente	23
Anwendung der Formeln auf praktische Fälle	26
Gleichgewichtsgleichung der Nadel bei rotierendem Induktor.	29
Schwingungsgleichung der Nadel bei rotierendem Induktor	31
Äquivalenz der Windungen des Induktors und eines Systems von Ringen .	33
Berechnung der Konstanten des Induktors A , B und F	40
Potential einer Rolle auf sich selbst	47
Potential des Induktors auf sich selbst	50
Bestimmung des Korrektionsgliedes $\frac{p\gamma}{w}$ auf experimentellem Wege. . . .	53
Berücksichtigung der Temperaturänderungen und der Polarisation. . . .	58
Normierung des Induktorwiderstandes	64
Bestimmung der Inklination	67
Beschreibung des Rotationsinduktors	67
Schlussbeobachtungen	73

Einleitung.

Im Jahre 1863 hat das von der „British Association“ gewählte Komitee* die englische Widerstandseinheit, den Ohm hergestellt, welcher in absolutem Maasse genau $10^{10} \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}$ betragen sollte. Die von dem Komitee benutzte Methode ist wiederholt der Gegenstand ausführlicher kritischer Betrachtungen gewesen** und bedarf daher hier keiner detaillierten Beschreibung; es möge nur daran erinnert werden, dass sie auf der Anwendung eines um eine vertikale Axe gleichförmig rotierenden Induktors beruht, in dessen Mitte sich ein sehr kleiner, in horizontaler Ebene drehbarer Magnet befand. Schon im Jahre 1838 bediente sich Wilhelm Weber ganz derselben Methode zur Bestimmung der Inklination und machte auf den wesentlichen Unterschied aufmerksam, der eintritt, jenachdem die Drehungsaxe des Induktors horizontal oder vertikal gestellt wird. In den Resultaten des magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 92, heisst es wörtlich: „So einfach dieses Verfahren zu sein scheint, die Inklination absolut zu messen, so ist es doch keiner unmittelbaren Anwendung fähig, weil bei der Drehung des Induktors um eine vertikale Axe zwar durch die horizontale erdmagnetische Kraft ein galvanischer Strom induziert wird, aber nicht durch sie allein, sondern zugleich auch durch die magnetische Kraft der Boussole (was bei der Drehung des Induktors um eine horizontale Axe nicht der Fall war).“

Untersucht man im allgemeinsten Falle, wo die Nadel eine ganz beliebige Richtung gegen die Drehungsaxe des Induktors besitzt, die Induktion der Nadel auf den rotierenden Induktor und berücksichtigt dabei die Induktion des Induktors auf sich selbst, so ergiebt sich, dass dieselbe jedesmal dann ein Maximum erreicht, wenn die mag-

* Report of the thirty-third meeting of the British Association, London 1864.

** F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergänzungsband VI S. 1; W. Weber und F. Zöllner, Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-phys. Klasse, 1880, S. 84.

netische Axe der Nadel auf der Drehungsaxe senkrecht steht, dass dieselbe dagegen ein Minimum, d. h. gleich Null wird, wenn die magnetische Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt. Der erste Fall findet bei den englischen Messungen statt. Man musste, um dem veränderlichen Elemente der Nadelinduktion einen möglichst geringen Einfluss einzuräumen, zur Anwendung eines sehr kleinen Magneten schreiten, woraus aber für die Sicherheit der Beobachtungen Nachteile erwachsen.

Geht man von dem zweiten Falle aus und schliesst damit die Induktion der Nadel gänzlich aus, so muss alsdann der Induktor in der Art wie der Multiplikator einer Sinusboussole der Nadel nachgedreht werden können, eine Forderung, welche sich praktisch realisieren lässt. Ausserdem muss noch die Inklination am Beobachtungsorte gemessen werden, was mit einem Induktions-Inklinatorium nach der Rückwerfungs- oder Multiplikationsmethode leicht geschehen kann. Kann man bei dieser Anordnung zwar in Rücksicht auf die Nadelinduktion eine grössere Nadel in Anwendung bringen, so muss man doch der elektromagnetischen Wirkungen wegen, wenn das Verhältnis zwischen Nadellänge zu dem mittleren Durchmesser des Induktors (in unserem Falle 1 zu 5) nicht sehr klein ist, der Nadellänge Rechnung tragen.

Die nachfolgenden Messungen wurden nach dieser Methode zur Ausführung gebracht, das Resultat $1 \text{ Ohm} = 0,9877 \cdot 10^{10} \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}$ stimmt sehr nahe mit demjenigen überein $\left(1 \text{ Ohm} = 0,9893 \cdot 10^{10} \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}\right)$, welches Lord Rayleigh und Dr. Schuster* kürzlich durch eine äusserst sorgfältige Wiederholung der Versuche des Komitees erhalten haben. Sie bedienten sich dabei des von dem Komitee benutzten Apparates und korrigierten einige Fehler, welche bei der früheren Berechnung mit untergelaufen waren.

Bei den Unterschieden, welche die Messungen verschiedener Experimentatoren** ergeben haben, und bei der grossen Mannigfaltigkeit der Messungen, aus denen das Endresultat schliesslich gewonnen

* Lord Rayleigh und Dr. Schuster, Proceedings of the Royal Society Nr. 213, 1881.

** Zu den erwähnten Abhandlungen sind noch hinzuzufügen: Wilhelm Weber, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. X. Zur Galvanometrie, Lorenz, Pogg. Ann. Bd. 149 S. 251; H. F. Weber, Absolute elektromagnetische und kalorimetrische Messungen, Zürich, Druck von Zürcher und Furrer in Zürich.

wird, ist eine genaue Kenntniss der Details aller Messungen von grosser Wichtigkeit, insbesondere die Details der Aufwindung des Induktors und die damit auf das engste in Verbindung stehende Bestimmung der Konstanten. Aus diesem Grunde sind dieselben in dem Folgenden ausführlich mitgeteilt worden. Die Art der Berechnung der Konstanten ist dabei eine andere als diejenige, welche das Komitee der British Association anwandte.

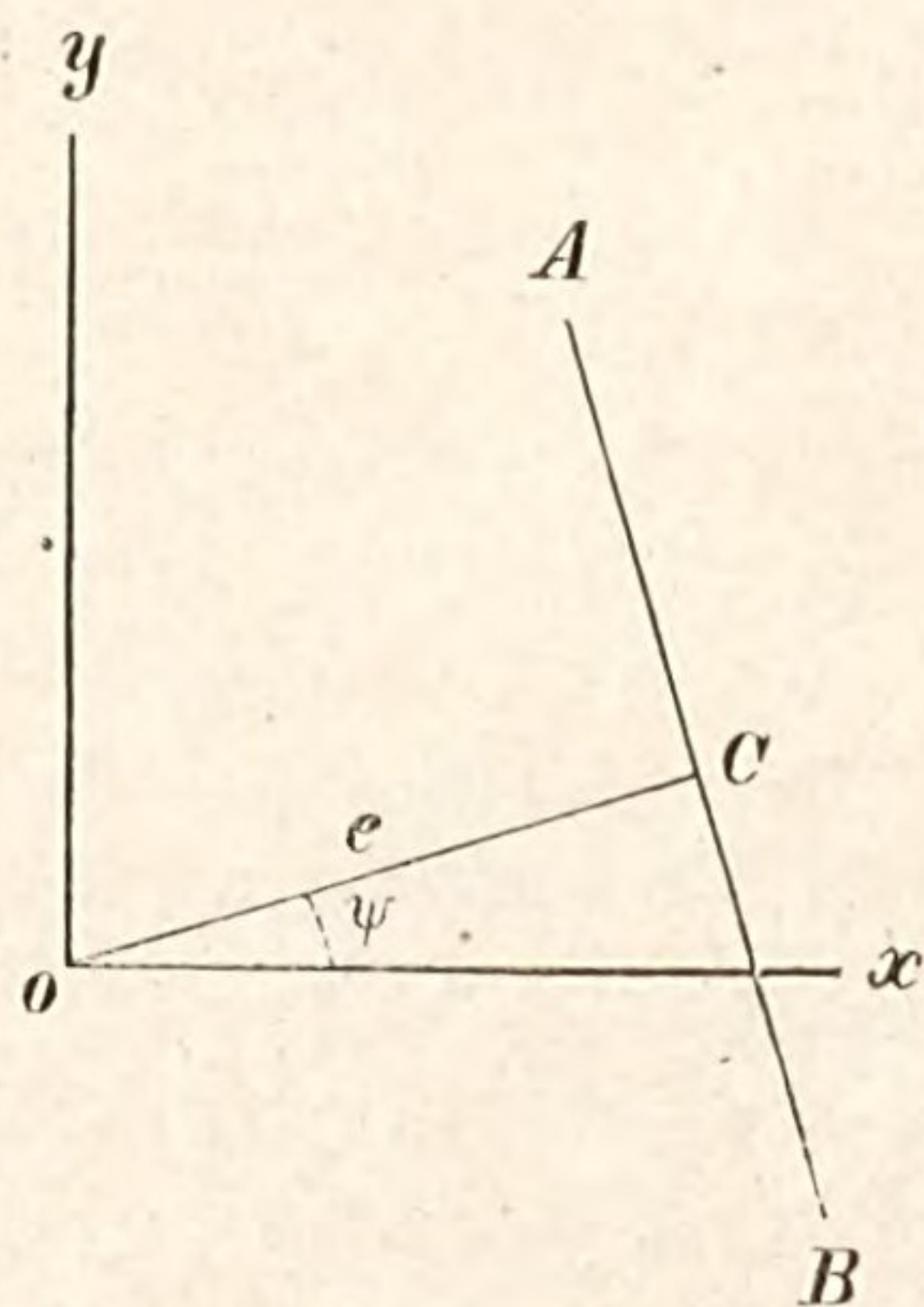
Da in neuerer Zeit Messungen in der Elektrizitätslehre nach absolutem Maasse in weiteren Kreisen Interesse erweckt haben, schien es zweckmässig, sich nicht bloss auf die Wiedergabe der Resultate der den Messungen zu Grunde liegenden mathematischen Betrachtungen zu beschränken, sondern die Ableitungen in möglichst elementarer Form darzulegen. Ausgehend von den Grundgesetzen des Elektromagnetismus und der Magnetinduktion sind daher die Gleichungen, auf welche sich die Messungen stützen, entwickelt worden, und zwar unter Berücksichtigung der Nadellänge und für den allgemeinsten Fall, bei welchem die magnetische Axe der Nadel eine ganz beliebige Richtung gegen die Drehungsaxe des Induktors besitzt. Die von dem Komitee der British Association benutzte Methode, sowie die hier befolgte, sind als spezielle Fälle in der allgemeinen Theorie enthalten.

Induktion eines magnetischen Punktes auf einen Ring bei Drehung des Ringes um eine zur Ringfläche parallele Axe.

Bei der Bestimmung der Induktion eines beliebigen magnetischen Punktes auf einen Ring, welcher um eine seiner Fläche parallelen Axe gedreht wird, soll die Voraussetzung gemacht werden, dass das im Mittelpunkt der Ringfläche errichtete Lot durch die Drehungsaxe gehe, eine Voraussetzung, welche bei der Konstruktion des Induktors erfüllt wird.

In Figur 1 stelle AB die Projektion des Ringes auf eine durch das Lot gelegte, zu der Drehungsaxe senkrechte Ebene dar.

Fig. 1.

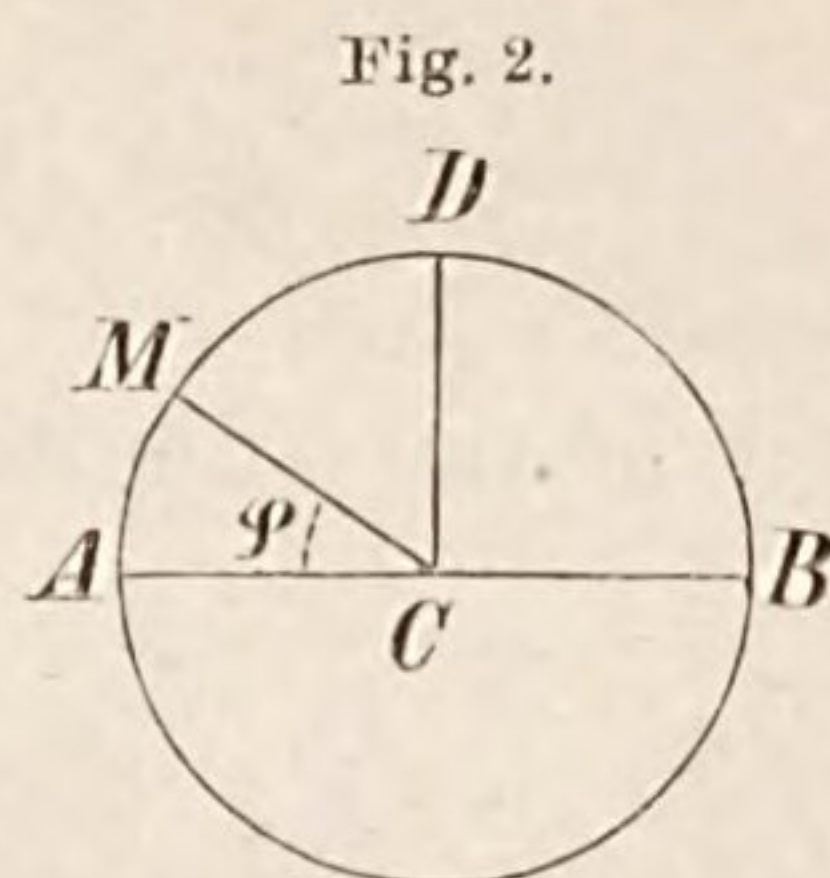


$CO = e$ sei das im Mittelpunkt der Ringebene errichtete Lot und O die Projektion der Drehungsaxe. Der Punkt O bilde den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems OX, OY, OZ , dessen X - und Y -Axe in die durch das Lot senkrecht zur Drehungsaxe gelegten Ebene fallen, dessen Z -Axe die Drehungsaxe bilde. Es möge hierbei zur positiven Richtung der Z -Axe die Richtung von Fuss zu Kopf eines Beobachters genommen werden, welcher in O senkrecht zur XY -Ebene aufgestellt, mit dem Gesicht in den Winkelraum XOY schauend die X -Axe zur Rechten hat.

Der Ring AB rotiere mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Richtung von der positiven X -Axe zur positiven Y -Axe. Zur Zeit t werde seine Lage durch den Winkel ψ bestimmt, welchen das Lot OC zu dieser Zeit mit der X -Axe bildet.

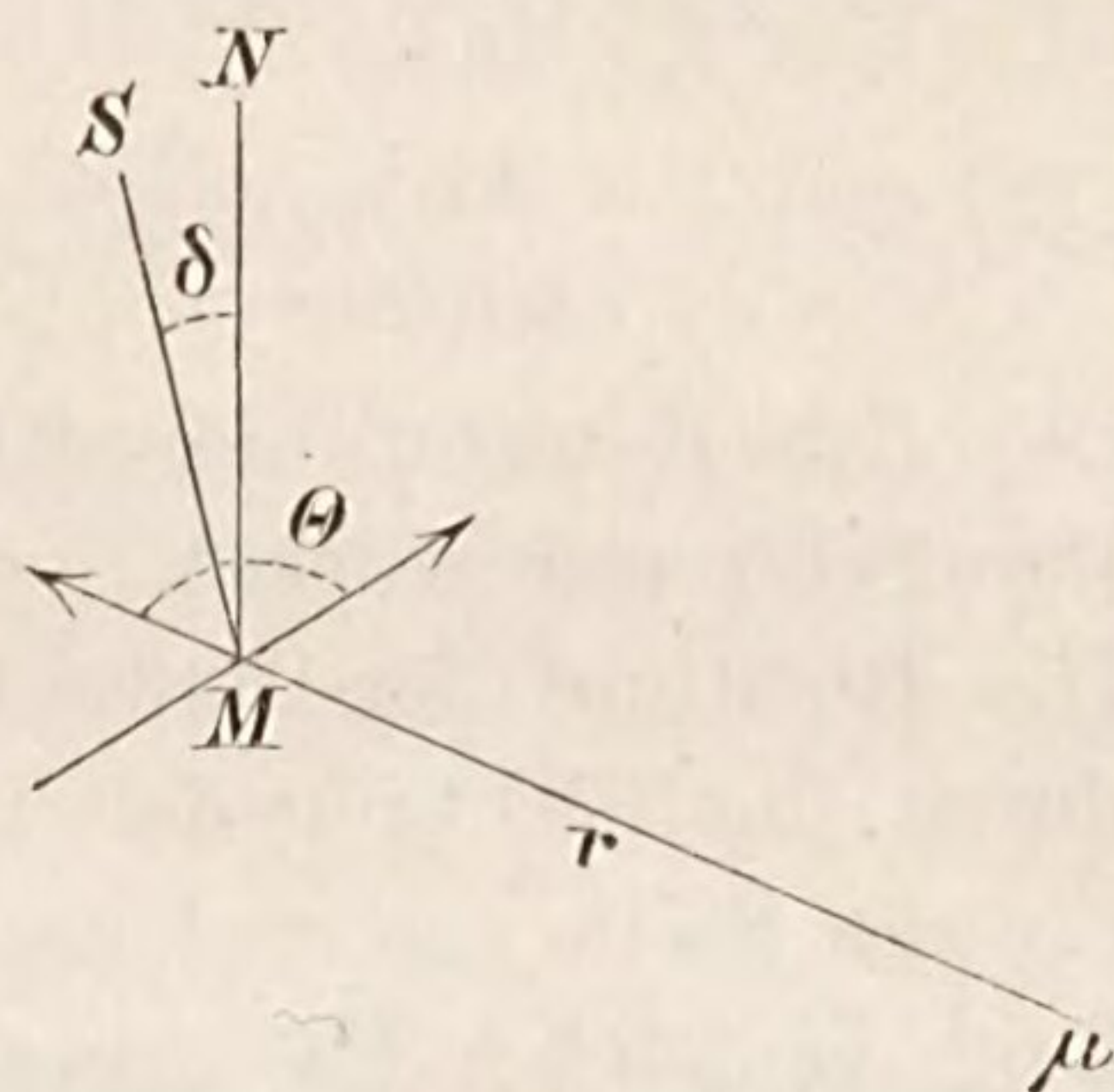
Die Lage eines beliebigen Ringelementes ds werde durch den Winkel φ festgestellt, welchen der nach ds von C aus gezogene

Radius mit der Richtung CA einschliesst. Denkt man sich in C (Figur 2) in der Richtung der positiven Z -Axe senkrecht zur XY -Ebene ein Perpendikel CD errichtet, so soll AMD die positive Richtung von ds sein. Um nun zunächst die elektromotorische Kraft zu bestimmen, welche in irgend einem Elemente ds des Ringes durch eine nordmagnetische Menge μ bei Drehung des Ringes erzeugt wird, gehen wir von dem Grundgesetze der Magnetinduktion aus, welches sich in unserem Falle folgendermassen darstellen lässt.



Es sei (Figur 3) μ eine nordmagnetische Menge, in der Entfernung r von derselben befinde sich das Leiterelement ds , r soll dabei in der Richtung μds positiv gerechnet werden.

Fig. 3.



Ferner sei θ der Winkel, welchen die positiven Richtungen von ds und r miteinander einschliessen. Das betrachtete Leiterelement ds besitze die Geschwindigkeit c in der Richtung MS , welche mit der positiven Normale MN zu der Ebene (r, ds) den Winkel δ bildet. Die positive Normale ist hierbei die Richtung von Fuss zu Kopf einer in M auf der Ebene (r, ds) aufgestellten Person, welche das Gesicht dem positiven Winkelraum zuwendet und die positive Richtung von ds zur Rechten hat. Die unter diesen Umständen in der Zeiteinheit induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ ist alsdann

$$\mathcal{E} = - \frac{c\mu ds}{r^2} \sin \theta \cos \delta,$$

wobei $\mathcal{E}$ in elektromagnetischem Maasse ausgedrückt ist.

Um in unserem Falle den Winkel δ zu bestimmen, welchen bei einem beliebigen Ringelement ds die positive Normale zur Ebene (r, ds) mit der Bewegungsrichtung von ds bildet, müssen die Richtungscosinus der Normalen MN und der Bewegungsrichtung MS gegeben sein.

Es seien x, y, z die Koordinaten des nordmagnetischen Theilchens μ , diejenigen des Elementes ds sind, wenn der Radius des Ringes mit ϱ bezeichnet wird,

$$e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi, \quad e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi, \quad \varrho \sin \varphi.$$

Ferner ergeben sich für die Richtungscosinus a, b, c von ds und a', b', c' von r die Werte

$$a = \sin \psi \sin \varphi, \quad a' = \frac{e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi - x}{r},$$

$$b = -\cos \psi \sin \varphi, \quad b' = \frac{e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi - y}{r},$$

$$c = \cos \varphi, \quad c' = \frac{\varrho \sin \varphi - z}{r},$$

und hieraus die Richtungscosinus der positiven Normale

$$\cos(NX) = \frac{bc' - cb'}{\sin \theta}, \quad \cos(NY) = \frac{ca' - ac'}{\sin \theta}, \quad \cos(NZ) = \frac{ab' - ba'}{\sin \theta}$$

oder

$$\cos(NX) = \frac{1}{r \sin \theta} (-\varrho \cos \psi - e \sin \psi \cos \varphi + y \cos \varphi + z \cos \psi \sin \varphi),$$

$$\cos(NY) = \frac{1}{r \sin \theta} (-\varrho \sin \psi + e \cos \psi \cos \varphi - x \cos \varphi + z \sin \psi \sin \varphi),$$

$$\cos(NZ) = \frac{1}{r \sin \theta} (e \sin \varphi - x \cos \psi \sin \varphi - y \sin \psi \sin \varphi).$$

Bei der Rotation des Ringes bewegen sich die Ringelemente in Parallelkreisen, deren gemeinschaftliche Axe die Drehungsaxe ist. Die Richtung der Bewegung eines Elementes wird daher bestimmt durch die Richtung der Tangente des entsprechenden Parallelkreises für die Stelle, an welcher sich das Ringelement zu der betrachteten Zeit befindet. Es ergibt sich ohne weiteres, dass der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Z -Axe stets 90 Grad betragen muss.

Bezeichnen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtung von ds in dem betrachteten Augenblicke mit den Axen bildet, durch χ' , χ'' , χ''' , so findet sich leicht

$$\cos \chi' = -\frac{e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi}{\sqrt{e^2 + \varrho^2 \cos \varphi^2}}, \quad \cos \chi'' = \frac{e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi}{\sqrt{e^2 + \varrho^2 \cos \varphi^2}},$$

$$\cos \chi''' = 0,$$

und demnach wird

$$\cos \delta = \cos(NX) \cos \chi' + \cos(NY) \cos \chi'' + \cos(NZ) \cos \chi'''$$

oder

$$\cos \delta = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta \sqrt{e^2 + \varrho^2 \cos \varphi^2}} \{ \varrho^2 + e^2 - x(e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi) \\ - y(e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi) \\ - z \varrho \sin \varphi \}.$$

Bemerkt man nun, dass

$$ds = \varrho d\varphi, \quad c = \frac{d\psi}{dt} \sqrt{e^2 + \varrho^2 \cos \varphi^2}$$

ist, so findet sich für $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu \varrho}{r^3} \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi d\varphi \{ \varrho^2 + e^2 - x(e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi) \\ - y(e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi) \\ - z \varrho \sin \varphi \}.$$

Bezeichnet man ferner den Abstand des betrachteten Ringelementes ds und denjenigen der nordmagnetischen Menge μ von dem Anfangspunkt des Koordinatensystems mit R und λ , so ist

$$R^2 = e^2 + \varrho^2, \quad \lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Wird der Winkel, welchen R und λ einschliessen, ω genannt und sind u, v, w die Winkel, welche λ mit den Axen bildet, also

$$\cos u = \frac{x}{\lambda}, \quad \cos v = \frac{y}{\lambda}, \quad \cos w = \frac{z}{\lambda},$$

so lässt sich der Ausdruck auf die einfachere Form bringen

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu \varrho}{r^3} \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi d\varphi \{ R^2 - R\lambda \cos \omega \},$$

wo

$$\cos \omega = \frac{e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi}{R} \cos u + \frac{e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi}{R} \cos v \\ + \frac{\varrho \sin \varphi}{R} \cos w;$$

oder, da

$$r^2 = R^2 - 2\lambda R \cos \omega + \lambda^2$$

ist, so findet sich schliesslich für die in der Zeiteinheit durch die nordmagnetische Menge μ in dem Elemente ds induzierte elektromotorische Kraft

$$1) \quad \mathcal{E} = -\mu \varrho \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi d\varphi \frac{R(R - \lambda \cos \omega)}{[R^2 - 2\lambda R \cos \omega + \lambda^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Induktion durch den Erdmagnetismus.

Mit Hilfe des entwickelten Ausdruckes $\mathcal{E}$ lässt sich leicht die Induktion bestimmen, welche die erdmagnetische Kraft auf den rotierenden Ring ausübt. Man kann sich nämlich diese Kraft stets dadurch hervorgerufen denken, dass in der Richtung der Kraft in einem sehr fernen Punkte eine grosse Menge Südmagnetismus konzentriert sei. Setzen wir daher in dem Ausdrucke 1) für μ $-\mu$ und lassen λ sehr gross werden, so ergibt sich, da $\frac{\mu}{\lambda^2}$ nichts anderes als die erdmagnetische Kraft ist, welche durch K bezeichnet werde,

$$\mathcal{E} = -KR\varrho \frac{d\psi}{dt} \cos \omega \cos \varphi d\varphi.$$

Hierin ist, wenn U, V, W die Winkel bedeuten, welche die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit den Koordinatenachsen bilden,

$$\cos \omega = \frac{e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi}{R} \cos U + \frac{e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi}{R} \cos V + \frac{\varrho \sin \varphi}{R} \cos W.$$

Für die in der Zeiteinheit in dem ganzen Ringe induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}'$ erhält man folglich

$$\mathcal{E}' = -KR\varrho \frac{d\psi}{dt} \int_0^{2\pi} \cos \omega \cos \varphi d\varphi$$

oder

$$2) \quad \mathcal{E}' = +K\pi\varrho^2 (\sin \psi \cos U - \cos \psi \cos V) \frac{d\psi}{dt}.$$

Zerlegt man die ganze erdmagnetische Kraft K in zwei Komponenten, die eine senkrechte zur Z -Axe, d. h. senkrecht zur Drehungsaxe, die andere parallel zu ihr, und ist Φ der Winkel zwischen der zur Drehungsaxe senkrechten Komponente und der positiven X -Axe, so ist

$$\cos U = \sin W \cos \Phi,$$

$$\cos V = \sin W \sin \Phi,$$

und daher

$$\mathcal{E}' = K \sin W \pi \varrho^2 \sin (\psi - \Phi) \frac{d\psi}{dt}.$$

$K \sin W$ ist aber die zur Drehungsaxe senkrechte Komponente und folglich ergibt sich, dass nur die zur Drehungsaxe senkrechte Komponente des Erdmagnetismus elektromotorisch wirkt, und dass folglich, wenn die Drehungsaxe die Richtung der erdmagnetischen Kraft besitzt, letztere gar keine Induktion ausübt. Für $\psi = \Phi$, d. h. wenn die Ringaxe mit der Richtung der zur Drehungsaxe senkrechten Komponente zusammenfällt, ist die Induktion gleich Null, für $\psi = \frac{\pi}{2} + \Phi$, d. h. in der darauf senkrechten Stellung ist die Induktion ein Maximum.

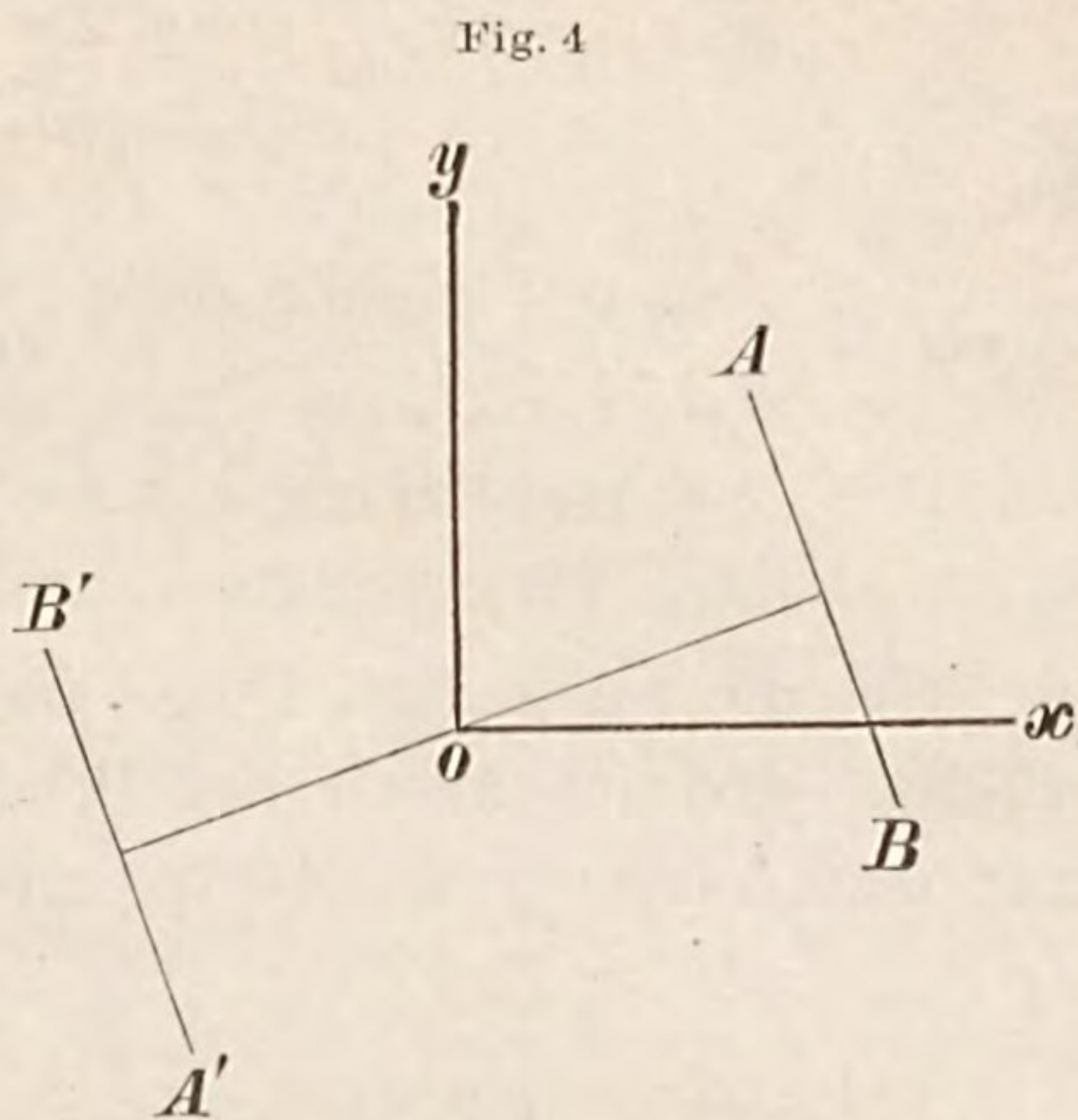
Der Ausdruck für $\mathcal{E}'$ lässt sich auch schreiben

$$\mathcal{E}' = -K \sin W \frac{d[\pi \varrho^2 \cos (\psi - \Phi)]}{dt};$$

$\pi \varrho^2 \cos (\psi - \Phi)$ ist die Projektion der Ringfläche auf eine Ebene, welche durch die Drehungsaxe senkrecht zu der wirksamen Komponente des Erdmagnetismus gelegt ist. Hiernach ist die durch den Erdmagnetismus in der Zeiteinheit induzierte elektromotorische Kraft gleich dem Produkte aus der zur Drehungsaxe senkrechten Komponente in die

Geschwindigkeit der Projektionsänderung der Ringfläche, dieselbe auf die oben definierte Ebene projiziert gedacht.

Aus dem Ausdrucke 2) erhält man die elektromotorische Kraft, welche in einem symmetrisch zur Drehungsaxe auf der anderen Seite derselben gelegenen Ringe induziert wird, wenn man für ψ $180 + \psi$ setzt. Dieselbe wird der früheren an Grösse gleich, an Richtung aber entgegengesetzt. Die Richtung ist aber bloss relativ zum Ringe die entgegengesetzte, relativ zum Raume oder zu den Koordinatenaxen ist die Richtung die nämliche. Es ergibt sich dies sofort, wenn man beachtet, dass bei dem Übergange von ψ zu $180 + \psi$ (Figur 4) der Punkt A' dem Punkte A , der Punkt B' dem Punkte B entspricht. Wird



demnach eine ganze Rolle, welche aus einer Anzahl symmetrisch zu beiden Seiten der Drehungsaxe liegenden Ringen besteht, um eine den Ringebenen parallele Axe gedreht, so ist die elektromotorische Kraft in allen Ringen gleich gerichtet.

Für die in einer Rolle vom Erdmagnetismus in der Zeiteinheit induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}_1$ ergibt sich nun ohne weiteres, da $K, \psi, U, V, \frac{\partial \psi}{\partial t}$ für alle Ringe denselben Wert besitzen,

$$\mathcal{E}_1 = K \Sigma \pi \varrho^2 \cdot (\sin \psi \cos U - \cos \psi \cos V) \frac{d\psi}{dt},$$

oder, wenn die Summe aller Ringflächen $\Sigma \pi \varrho^2$ durch F bezeichnet wird,

$$3) \quad \mathcal{E}_1 = KF (\sin \psi \cos U - \cos \psi \cos V) \frac{d\psi}{dt}.$$

Induktion durch einen Magnet.

Es befinde sich jetzt innerhalb der Rolle ein Magnet, dessen Mitte mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammenfällt, und dessen magnetische Axe mit den Koordinatenaxen die Winkel u, v, w bildet. Nach Gauss kann man sich diesen Magnet in erster Annäherung ersetzt denken durch zwei Pole, in denen die nordmagnetische Menge $+\mu$ und die gleichgrosse süd magnetische Menge $-\mu$ konzentriert sind. Der Abstand der Pole von einander sei 2λ .

Derselbe soll gegen den Abstand R eines Ringelementes von dem Anfangspunkt des Koordinatensystems klein sein. Die durch den Nordpol in einem Ringelemente induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}''$ ist dann nach 1)

$$\mathcal{E}'' = -\mu \varrho \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi d\varphi \frac{R [R - \lambda \cos \omega]}{[R^2 - 2\lambda R \cos \omega + \lambda^2]^{\frac{3}{2}}},$$

wo

$$\begin{aligned} \cos \omega = \frac{e \cos \psi - \varrho \sin \psi \cos \varphi}{R} \cos u + \frac{e \sin \psi + \varrho \cos \psi \cos \varphi}{R} \cos v \\ + \frac{\varrho \sin \varphi}{R} \cos w. \end{aligned}$$

Um die im ganzen Ringe induzierte elektromotorische Kraft zu erhalten, entwickeln wir den Bruch nach Kugelfunktionen. Dividiert man den Ausdruck im Zähler und Nenner durch R^3 , so folgt

$$\mathcal{E}'' = -\frac{\mu \varrho}{R} \frac{d\psi}{dt} \cos \varphi d\varphi \frac{1 - \frac{\lambda}{R} \cos \omega}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \frac{\lambda}{R} \cos \omega}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda}{R} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{R}\right)} \left(\frac{1}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= 1 + \sum_1^{\infty} Q^{(n)} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n + \frac{\lambda}{R} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{R}\right)} \left[1 + \sum_1^{\infty} Q^{(n)} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \right] \\ &= 1 + \sum_1^{\infty} (n+1) Q^{(n)} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n; \end{aligned}$$

dabei ist

$$Q^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$\left\{ \cos \omega^n - \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{n \cdot n-1}{2n-1} \cos \omega^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2n-1 \cdot 2n-3} \cos \omega^{n-4} - \dots \right\}.$$

Hiernach wird die im ganzen Ringe durch den Nordpol induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}'''$

$$\mathcal{E}''' = -\frac{\mu \varrho}{R} \frac{d\psi}{dt} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} (n+1) Q^{(n)} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^n \right\}.$$

Um die angedeutete Integration auszuführen, drücken wir $Q^{(n)}$ als Funktion der Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ aus. Zu diesem Zwecke werde der Ort des betrachteten Ringelementes und derjenige der nordmagnetischen Menge μ durch die Polarkoordinaten R, θ, φ und $\lambda, \theta', \varphi'$ eines Polarkoordinatensystems bestimmt, welches mit dem früheren denselben Anfangspunkt besitzt, dessen Axe aber mit dem Lote e zusammenfällt. Es seien θ und θ' die Winkel, welche die Radienvektoren R und λ nach dem Ringelement ds und nach μ mit e bilden, φ und φ' dagegen die Winkel, welche die durch die Radienvektoren und e gelegten Ebenen mit der XY -Ebene einschliessen. Es hat dann φ die nämliche Bedeutung wie früher. Die Koordinaten der nordmagnetischen Menge μ sind dann

$$4) \quad \begin{cases} x = \lambda \cos \theta' \cos \psi - \lambda \sin \theta' \cos \varphi' \sin \psi, \\ y = \lambda \cos \theta' \sin \psi + \lambda \sin \theta' \cos \varphi' \cos \psi, \\ z = \lambda \sin \theta' \sin \varphi'. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung $\cos \theta = \mu$ $\cos \theta' = m$, so hat man für $Q^{(n)}$ als Funktion der Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ

$$\begin{aligned} Q^{(n)} = & A_0^{(n)} P_{\mu}^{(n)} + \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial P_{\mu}^{(n)}}{\partial \mu} (A_1^{(n)} \cos \varphi + B_1^{(n)} \sin \varphi) \\ & + (\sqrt{1-\mu^2})^2 \frac{\partial^2 P_{\mu}^{(n)}}{\partial \mu^2} (A_2^{(n)} \cos 2\varphi + B_2^{(n)} \sin 2\varphi) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + (\sqrt{1-\mu^2})^n \frac{\partial^n P_{\mu}^{(n)}}{\partial \mu^n} (A_n^{(n)} \cos n\varphi + B_n^{(n)} \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} A_0^{(n)} &= P_m^{(n)}, \\ A_1^{(n)} &= \frac{2}{n \cdot n + 1} \sqrt{1-m^2} \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \cos \varphi', \\ &\dots \dots \dots \\ B_1^{(n)} &= \frac{2}{n \cdot n + 1} \sqrt{1-m^2} \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \sin \varphi', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$A_i^{(n)} = \frac{2}{(n-i+1) \dots (n+i)} (V1-m^2)^i \frac{\partial^i P_m^{(n)}}{\partial m^i} \cos i \varphi',$$

$$B_i^{(n)} = \frac{2}{(n-i+1) \dots (n+i)} (V1-m^2)^i \frac{\partial^i P_m^{(n)}}{\partial m} \sin i \varphi',$$

$$P_\mu^{(n)} = \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} \left\{ \mu^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1} \mu^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3} \mu^{n-4} - \dots \right\},$$

$$P_m^{(n)} = \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} \left\{ m^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1} m^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3} m^{n-4} - \dots \right\}.$$

Führt man diesen Wert von $Q^{(n)}$ in den Ausdruck $\mathcal{E}'''$ ein, so ergibt sich, da

$$\int_0^{2\pi} \cos i \varphi \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin i \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

und nur für $i = 1$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi^2 d\varphi = \pi$$

ist, dass alle Glieder mit Ausnahme desjenigen mit dem Index 1 wegfallen. Es wird mithin

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''' &= -\frac{\mu \pi \varrho}{R} \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sum_1^\infty (n+1) A_1^{(n)} \frac{\partial P_\mu^{(n)}}{\partial \mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \\ &= -\frac{\lambda \mu \pi \varrho}{R^2} \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' \sum_1^\infty \frac{2}{n} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{n-1} \frac{\partial P_\mu^{(n)}}{\partial \mu} \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \end{aligned}$$

und wenn man für $\frac{\partial P_\mu^{(n)}}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m}$ ihre Werte einführt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''' &= -\frac{\lambda \mu \pi \varrho}{R^2} \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' \\ &\quad \left\{ 2 + \frac{\lambda}{R} \left(\frac{3}{1}\right)^2 \cos \theta \cos \theta' \right. \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{R^2} \frac{2}{3} \left(\frac{3.5}{1.2}\right)^2 \left(\cos \theta^2 - \frac{1}{5}\right) \left(\cos \theta'^2 - \frac{1}{5}\right) \\ &\quad \left. + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin endlich für μ , θ' , φ' die Werte $-\mu$, $180 - \theta'$, $180 + \varphi'$, so erhält man die durch den Südpol induzierte elektromotorische Kraft, und durch Addition beider Ausdrücke, wenn man das magnetische Moment $2\lambda\mu$ durch m bezeichnet, die durch den Magnet in dem Ringe während der Zeiteinheit induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}^{\text{IV}}$

$$\mathcal{E}^{\text{IV}} = - \frac{2\pi\varrho m}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial t} \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi' \left\{ 1 + \frac{75}{4} \frac{\lambda^2}{R^2} (\cos\theta^2 - \frac{1}{5}) (\cos\theta'^2 - \frac{1}{5}) + \dots \right\}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen 4) lässt sich $\mathcal{E}^{\text{IV}}$ leicht durch die früheren Koordinaten ausdrücken. Man hat nämlich

$$5) \quad \begin{cases} \lambda \cos\theta' = y \sin\psi + x \cos\psi, \\ \lambda \sin\theta' \cos\varphi' = y \cos\psi - x \sin\psi \end{cases}$$

oder, da

$$\frac{x}{\lambda} = \cos u, \quad \frac{y}{\lambda} = \cos v,$$

$$\cos\theta' = \cos v \sin\psi + \cos u \cos\psi,$$

$$\sin\theta' \cos\varphi' = \cos v \cos\psi - \cos u \sin\psi.$$

Ferner ist

$$\cos\theta = \frac{e}{R} = \frac{e}{\sqrt{e^2 + \varrho^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\varrho}{R} = \frac{\varrho}{\sqrt{e^2 + \varrho^2}}.$$

Demnach erhält man

$$\mathcal{E}^{\text{IV}} = - 2\pi m \frac{d\psi}{dt} (\cos v \cos\psi - \cos u \sin\psi) \frac{\varrho^2}{[e^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 - \frac{15}{4} \lambda^2 \frac{\varrho^2 - 4e^2}{(e^2 + \varrho^2)^2} [(\cos v \sin\psi + \cos u \cos\psi)^2 - \frac{1}{5}] + \dots \right\}.$$

Wie bei der Induktion durch den Erdmagnetismus, überzeugt man sich leicht, dass die durch den Magnet in einem symmetrisch zur Drehungsaxe auf der andern Seite derselben gelegenen Ringe induzierte elektromagnetische Kraft, welche man erhält, wenn $180 + \psi$ an Stelle von ψ gesetzt wird, relativ zum Ringe die *entgegengesetzte* Richtung, relativ zu dem Koordinatensystem aber die *gleiche* Richtung besitzt.

Um die elektromotorische Kraft zu finden, welche der Magnet in der ganzen Rolle induziert, hat man nur die Werte von $\mathcal{E}^{\text{IV}}$ zu summieren, welche den verschiedenen Werten von ϱ und e entsprechen.

Beschränkt man sich in der Reihenentwicklung nach Potenzen von $\frac{\lambda}{R}$ mit dem quadratischen Gliede, so ergibt sich für die während der Zeiteinheit in der Rolle durch den Magnet induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}_2$

$$6) \quad \mathcal{E}_2 = 2 \pi m \frac{d\psi}{dt} (\cos u \sin \psi - \cos v \cos \psi) \cdot S,$$

wo

$$S = A - \lambda^2 B [(\cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi)^2 - \frac{1}{5}]$$

ist und

$$A = \sum \sum \frac{\varrho^2}{(e^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{15}{4} \sum \sum \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - 4e^2)}{[e^2 + \varrho^2]^{\frac{7}{2}}}$$

zwei Konstanten sind, welche lediglich von der Beschaffenheit der Rolle abhängen. $2\pi A$ ist die Kraft, welche ein Strom von der Intensität 1 auf ein im Anfangspunkt des Koordinatensystems konzentriertes magnetisches Teilchen von der Menge 1 ausübt.

Hieraus ergibt sich nun sofort, dass für $u = \frac{\pi}{2}$ und $v = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die magnetische Axe mit der Drehungsaxe des Induktors zusammenfällt, der Magnet überhaupt eine Induktion nicht ausübt. Es ergibt sich ferner, dass bei irgend einer Richtung der magnetischen Axe die Induktion gleich Null ist, wenn

$$\psi = \arctg \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right),$$

d. h. wenn die Ringebenen zu der durch die magnetische Axe und durch die Drehungsaxe des Induktors gelegten Ebene senkrecht stehen. Die Induktion erreicht dagegen ihr Maximum in den hierauf senkrechten Stellungen.

Induktion des Induktors auf sich selbst.

Ausser den beiden elektromotorischen Kräften $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$, welche von dem Erdmagnetismus und dem Magneten in dem rotierenden Induktor induziert werden, wird infolge der veränderlichen Stromintensität noch eine dritte elektromotorische Kraft durch Selbstinduktion hervorgerufen.

Ist i die zur Zeit t im Induktor herrschende Stromintensität, so hat man für die in der Zeiteinheit im Induktor durch Selbstinduktion hervorgerufene elektromotorische Kraft

$$-\frac{di}{dt} \cdot p,$$

wo

$$p = \iint \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} ds ds'$$

das Potential des Induktordrahtes auf sich selbst bedeutet.*

Ist nun E die zur Zeit t im Induktordraht wirkende gesamte elektromotorische Kraft, w der Widerstand der ganzen geschlossenen Kette, so ist zur Zeit t

$$i = \frac{E}{w},$$

und folglich die durch Selbstinduktion hervorgerufene elektromotorische Kraft

$$-\frac{p}{w} \frac{dE}{dt}.$$

Da die Summe der drei elektromotorischen Kräfte der ganzen elektromotorischen Kraft gleich sein müssen, so erhält man die Differentialgleichung

$$E = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \frac{p}{w} \frac{dE}{dt},$$

aus welcher sich die zur Zeit t im Induktor wirkende gesamte elektromotorische Kraft

$$E = \text{Konst.} e^{-\frac{w}{p}t} + \frac{w}{p} e^{-\frac{w}{p}t} \int e^{\frac{w}{p}t} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) dt$$

ergiebt.

Wir setzen nun voraus, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Induktors konstant sei, und dass die Rotation schon lange im Gange ist, alsdann fällt das mit der Integrationskonstante multiplizierte Glied fort. Ist γ die konstante Rotationsgeschwindigkeit, so ist

$$\frac{d\psi}{dt} = \gamma, \quad \psi = \gamma t,$$

* An Stelle dieses linearen Doppelintegrals ist streng genommen ein räumliches Doppelintegral, d. h. ein sechsfaches Integral zu setzen, da obiges Integral für jeden geschlossenen Strom unendlich gross wird. Da die Induktion einer Rolle *auf sich selbst* auf die *wechselseitige* Induktion einer Reihe von einen der getrennten, geschlossenen Strömen zurückgeführt wird, so ist der übliche Ausdruck für das Potential auf sich selbst beibehalten worden. Meines Wissens ist eine strenge Entwicklung des Potentials eines geschlossenen Stromes auf sich selbst bisher noch nicht ausgeführt worden. Das Potential eines Stromes auf sich selbst unter gewissen Annahmen hat Wilhelm Weber entwickelt. Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen, Leipzig 1864, oder: Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. VI, S. 607.

wenn die Zeit von dem Augenblick gezählt wird, wo $\psi = 0$ ist. Führt man in dem obigen Integrale ψ an Stelle von t als Veränderliche ein, so wird

$$7) \quad E = E_1 + E_2,$$

wo

$$E_1 = \frac{w}{p\gamma} e^{-\frac{w}{p\gamma}\psi} \int e^{\frac{w}{p\gamma}\psi} \mathcal{E}_1 d\psi,$$

$$E_2 = \frac{w}{p\gamma} e^{-\frac{w}{p\gamma}\psi} \int e^{\frac{w}{p\gamma}\psi} \mathcal{E}_2 d\psi.$$

Mit Hilfe der Gleichung 3) findet sich hieraus

$$8) \quad E_1 = \frac{KF\gamma}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left\{ \sin \psi \cos U - \cos \psi \cos V - \frac{p\gamma}{w} (\cos \psi \cos U + \sin \psi \cos V) \right\}.$$

Um auch den Wert von E_2 herzuleiten, kann man demselben zunächst eine einfachere Form geben. Bemerkt man nämlich, dass

$$\cos u^2 + \cos v^2 = \sin w^2$$

ist und führt als neue Veränderliche

$$x = \psi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right)$$

ein, so findet sich

$$E_2 = 2\pi m\gamma \frac{w}{p\gamma} e^{-\frac{w}{p\gamma}x} \sin w \int e^{\frac{w}{p\gamma}x} \sin x \left\{ A - \lambda^2 B \left(\cos x^2 \sin w^2 - \frac{1}{5} \right) \right\} dx,$$

woraus sich

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} E_2 = & \frac{2\pi m\gamma \sin w}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left\{ \left(A + \frac{\lambda^2 B}{5} \right) \left(\sin x - \frac{p\gamma}{w} \cos x \right) \right. \\ & - \frac{\lambda^2 B \sin w^2}{1 + \left(\frac{3p\gamma}{w}\right)^2} \left[\cos x^2 \left(\sin x - \frac{3p\gamma}{w} \cos x \right) \left(1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2 \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2p\gamma}{w} \left(\cos x + \frac{p\gamma}{w} \sin x \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

ergiebt.

Der Ausdruck E_1 zeigt, dass sich die Lage des Induktors, bei welcher die Induktion durch den Erdmagnetismus ein Minimum oder Maximum wird, infolge der Selbstinduktion in der Richtung der Rotation verschoben hat. Bezeichnet wie früher Φ den Winkel zwischen der positiven X-Axe und der zur Drehungsaxe senkrechten Komponente des Erdmagnetismus, so wird $E_1 = 0$, wenn

$$\psi - \Phi = \arctg \left(\frac{p\gamma}{w} \right) \text{ oder } \psi - \Phi = \pi + \arctg \left(\frac{p\gamma}{w} \right).$$

E_1 erreicht dagegen sein Maximum und Minimum für

$$\psi - \Phi = \frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{p\gamma}{w} \right) \text{ und } \psi - \Phi = \frac{3\pi}{2} + \arctg \left(\frac{p\gamma}{w} \right).$$

Bei dem später beschriebenen Induktor fand sich für die Temperatur t des Drahtes

$$\frac{p\gamma}{w} = 0,14369 - 0,0005023 t,$$

also für die mittlere Temperatur $t = 15^\circ \text{ C.}$,

$$\frac{p\gamma}{w} = 0,13616.$$

Hieraus folgt, dass E_1 gleich null wird für

$$\psi - \Phi = 7^\circ 45' 15'' \text{ und } 187^\circ 45' 15'',$$

dass dagegen das Maximum und Minimum der Induktion bei

$$\psi - \Phi = 97^\circ 45' 15'' \text{ und } 277^\circ 45' 15''$$

eintritt. Es hat sich mithin das Maximum und das Minimum infolge der Selbstinduktion um ca. 7 Grad verschoben.

Ganz dasselbe gilt auch für die Induktion durch den Magnet, wenn man von dem den Polabstand enthaltenden Korrektionsgliede absieht. Es ist diese Induktion gleich null, oder ein Maximum oder Minimum für

$$x = n\pi + \arctg \left(\frac{p\gamma}{w} \right) \text{ oder } x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{p\gamma}{w} \right),$$

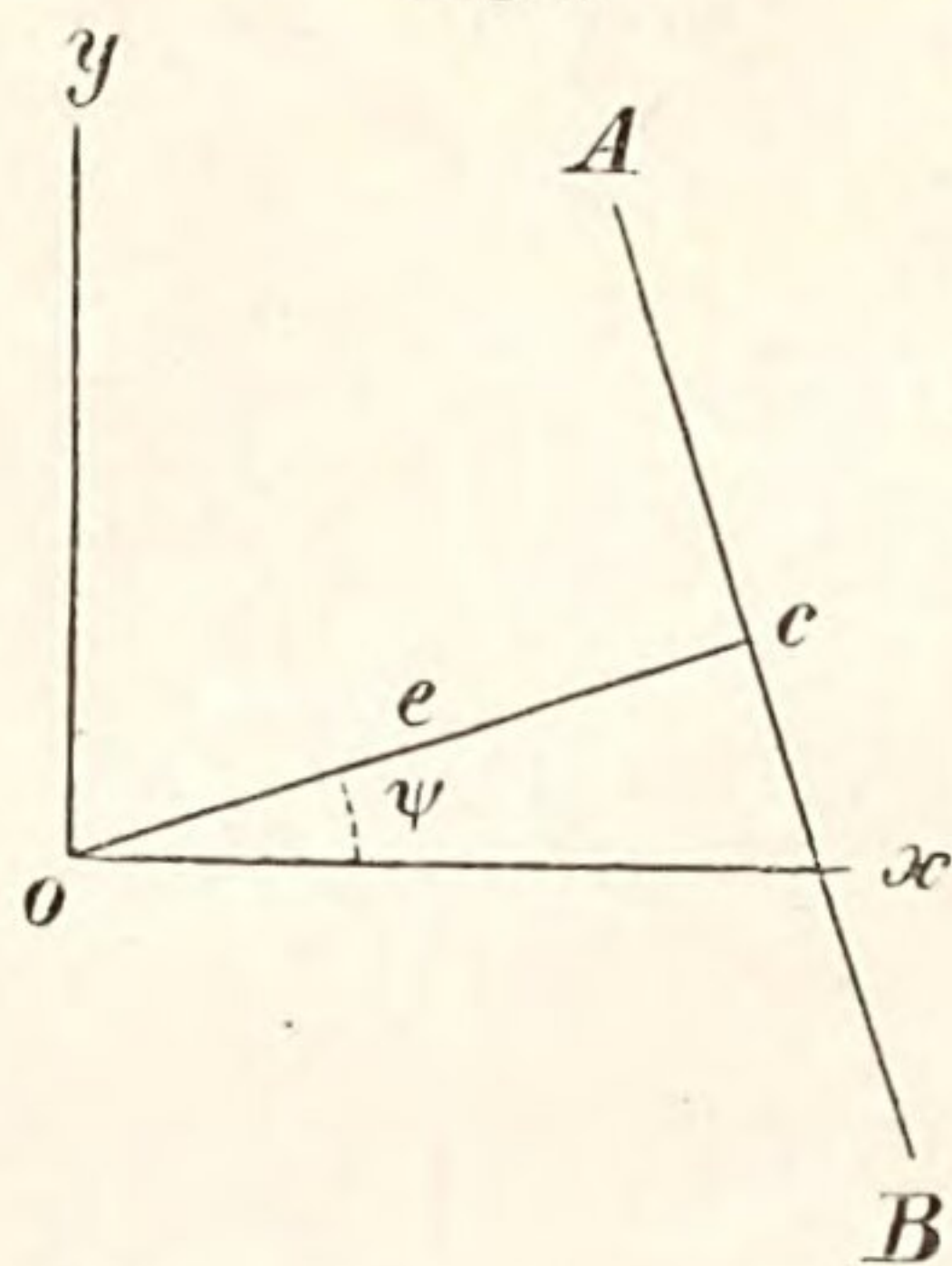
x ist aber der Winkel, welchen das im Mittelpunkt der Kreisflächen errichtete Lot mit der durch die Drehungsaxe und die magnetische Axe gelegten Ebene bildet.

Bestimmung der Drehungsmomente, welche der Induktor auf eine in seinem Mittelpunkt befindliche, beliebig gerichtete Nadel ausübt.

Um die Wirkung des gleichförmig rotierenden Induktors auf eine in seinem Mittelpunkt befindliche, beliebig gerichtete Nadel bestimmen zu können, hat man zunächst die Drehungsmomente zu entwickeln, welche der Induktor zu irgend einer Zeit, d. i. bei irgend einer Stellung ψ auf die Nadel ausübt. Der Wert E (7) gestattet die Intensität in dem Induktordraht für jede Stellung ψ anzugeben, da dieser Wert nur durch den Widerstand w der geschlossenen Kette

zu dividieren ist, um dieselbe zu erhalten. Wir bestimmen zuvor die Drehungsmomente, welcher ein einzelner Ring auf die Nadel ausübt, wenn derselbe von einem Strom von der Intensität 1 durchflossen wird. Die Intensität soll nach elektromagnetischem Maasse gemessen werden.

Fig. 5.



Es sei wie früher (Figur 5) AB die Projektion des Ringes auf die XY -Ebene. Der Strom cirkuliere in der Richtung von A nach dem in C parallel zur positiven Z -Axe errichteten Lote und in derselben Richtung mögen die Ringelemente ds gezählt werden. Die durch den Anfangspunkt O des Koordinatensystems gehende magnetische Axe der Nadel bilde mit den Axen die Winkel u, v, w ; die Koordinaten des Nordpols seien

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos \theta' \cos \psi - \lambda \sin \theta' \cos \varphi' \sin \psi, \\ y &= \lambda \cos \theta' \sin \psi + \lambda \sin \theta' \cos \varphi' \cos \psi, \\ z &= \lambda \sin \theta' \sin \varphi', \end{aligned}$$

wo $\lambda, \theta', \varphi'$ die Polarkoordinaten in Bezug auf ein Koordinatensystem sind, welches O zu seinem Pol und e zu seiner Axe hat. Der Abstand der Pole sei 2λ , und die Mitte der Nadel falle wie früher mit dem Koordinatenanfang O zusammen.

Denkt man sich durch den Ring eine Kugelfläche gelegt, deren Centrum mit O zusammenfällt, und sind R, θ, φ die Polarkoordinaten irgend eines Flächenelementes, so hat man für das Potential des Ringstromes an der Stelle x, y, z :

$$V = R^2 \frac{d}{dR} \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{r},$$

wo

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - 2R\lambda \cos \omega + \lambda^2, \\ \cos \omega &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi) \end{aligned}$$

und θ_1 dem Werte von θ für ein Ringelement entspricht. Setzt man den Wert von r ein und führt die Differentiation aus, so folgt:

* Dieser von mir unabhängig gefundene Potentialausdruck findet sich auch in dem kürzlich erschienenen Werke von F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, S. 90.

$$V = - \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \frac{1 - \frac{\lambda}{R} \cos \omega}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$V = - \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \left\{ \frac{1}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda}{R} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{R}\right)} \frac{1}{\left[1 - 2 \frac{\lambda}{R} \cos \omega + \frac{\lambda^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

oder indem man die Brüche nach Kugelfunktionen entwickelt, wobei, damit eine Drehung des Ringes möglich ist, λ kleiner als R vorausgesetzt wird,

$$V = - \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} (n+1) Q^{(n)} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \right\}$$

oder

$$V = 2\pi (\cos \theta_1 - 1) - \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} Q^{(n)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Führt man in dem Doppelintegral $Q^{(n)}$ als Funktion der Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ (S. 11) ein, so ergibt sich sofort, da

$$\int_0^{2\pi} \sin n \varphi \, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos n \varphi \, d\varphi = 0,$$

dass sich dasselbe auf ein einziges Glied reduziert. Man erhält nämlich

$$\int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} Q^{(n)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^{\theta_1} A_0^{(n)} P_{\mu}^{(n)} \sin \theta \, d\theta$$

oder, indem man

$$\cos \theta = \mu, \quad -\sin \theta \, d\theta = d\mu$$

setzt,

$$\int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} Q^{(n)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_{\cos \theta_1}^1 A_0^{(n)} P_{\mu}^{(n)} d\mu = 2\pi P_m^{(n)} \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu,$$

wo $P_m^{(n)}$ lediglich von $m = \cos \theta'$ abhängig ist.

Man erhält mithin

$$V = 2\mu (\cos \theta_1 - 1) - 2\pi \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n P_m^{(n)} \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu.$$

Hieraus ergeben sich die Komponenten der auf den Nordpol wirkenden Kräfte

$$-\mu \frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi\mu \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \cdot \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial x},$$

$$-\mu \frac{\partial V}{\partial y} = 2\pi\mu \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \cdot \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial y},$$

$$-\mu \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi\mu \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \cdot \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial z},$$

und die aus diesen Komponenten hervorgehenden Drehungsmomente bezüglich der Z-, X- und Y-Axe

$$2\pi\mu \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \left(\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial y} x - \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial x} y \right),$$

$$2\pi\mu \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \left(\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial z} y - \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial y} z \right),$$

$$2\pi\mu \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \left(\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial x} z - \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial z} x \right).$$

Da nun nach 5)

$$m = \cos \theta' = \frac{x}{\lambda} \cos \psi + \frac{y}{\lambda} \sin \psi = \cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi$$

und ferner

$$\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \frac{\cos \psi}{\lambda},$$

$$\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial y} = \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \frac{\sin \psi}{\lambda},$$

$$\frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial z} = 0$$

ist, so werden die drei Drehungsmomente, wenn zur Abkürzung

$$S' = \sum_1^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &+ 2\pi\mu (\sin \psi \cos u - \cos \psi \cos v) \cdot S', \\ &- 2\pi\mu \sin \psi \cos w \cdot S', \\ &+ 2\pi\mu \cos \psi \cos w \cdot S'. \end{aligned}$$

Es hat nun seine Schwierigkeit, den Ausdruck für S' wirklich zu bilden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\cos \theta_1}^1 P_{\mu}^{(n)} d\mu &= \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} \left\{ \frac{1}{n+1} (1 - \cos \theta_1^{n+1}) - \frac{n}{2.2n-1} (1 - \cos \theta_1^{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2.4.2n-1.2n-3} (1 - \cos \theta_1^{n-3}) - \dots \right\}, \\ \frac{\partial P_m^{(n)}}{\partial m} &= \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} \left\{ n \cos \theta_1^{n-1} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2.2n-1} \cos \theta_1^{n-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{2.4.2n-1.2n-3} \cos \theta_1^{n-5} - \dots \right\}; \end{aligned}$$

folglich, da

$$\cos \theta' = \cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi$$

$$\begin{aligned} S' &= 2 \frac{\lambda}{R} \frac{1}{2} (1 - \cos \theta_1^2) \\ &+ 3 \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2 \left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2 \left[\frac{1}{3} (1 - \cos \theta_1^3) - \frac{1}{3} (1 - \cos \theta_1) \right] \\ &\quad [2(\cos w \cos \psi + \cos v \sin \psi)] \\ &+ 4 \left(\frac{\lambda}{R}\right)^3 \left(\frac{1.3.5}{1.2.3}\right)^2 \left[\frac{1}{4} (1 - \cos \theta_1^4) - \frac{3}{2.5} (1 - \cos \theta_1^2) \right] \\ &\quad \left[3(\cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi)^2 - \frac{3}{5} \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Setzt man nun in den Ausdrücken für die Drehungsmomente für μ, u, v, w der Reihe nach $-\mu, 180 + u, 180 + v, 180 + w$, so erhält man die entsprechenden Drehungsmomente für den Südpol und durch Addition die Drehungsmomente, welche der Ring auf den Magneten ausübt. Bei der Addition verschwinden alle Glieder mit geraden Potenzen von $\frac{\lambda}{R}$. Bezeichnet man wie früher mit $m = 2\lambda\mu$ das magnetische Moment der Nadel und begnügt sich in der Entwicklung nach Potenzen von $\frac{\lambda}{R}$ mit dem quadratischen Gliede, so ergibt sich für die drei Drehungsmomente $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ um die Z -, X - und Y -Axe, welche der Ring auf die Nadel ausübt,

$$\mathcal{A}_1 = + 2 \pi m (\cos u \sin \psi - \cos v \cos \psi) S'',$$

$$\mathcal{A}_2 = - 2 \pi m \cos w \sin \psi S'',$$

$$\mathcal{A}_3 = + 2 \pi m \cos w \cos \psi S'',$$

wo

$$S'' = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \cos \theta_1^2 + 3 \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^2 \left[1 - \cos \theta_1^4 - \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} (1 - \cos \theta_1^2) \right] \left[(\cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi)^2 - \frac{1}{5} \right] \right\}$$

wofür auch, da

$$1 - \cos \theta_1^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + e^2}, \quad 1 - \cos \theta_1^4 - \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} (1 - \cos \theta_1^2) = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + e^2} \left(\frac{e^2}{\varrho^2 + e^2} - \frac{1}{5} \right)$$

geschrieben werden kann,

$$S'' = \frac{\varrho^2}{[\varrho^2 + e^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{75}{4} \lambda^2 \left[\frac{\varrho^2 e^2}{[\varrho^2 + e^2]^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{5} \frac{\varrho^2}{[\varrho^2 + e^2]^{\frac{5}{2}}} \right] \left[(\cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi)^2 - \frac{1}{5} \right]$$

Die Drehungsmomente eines symmetrisch auf der anderen Seite der Drehungsaxe gelegenen Ringes erhält man, wenn für ψ $180 + \psi$ gesetzt wird. Nimmt man an, wie dies bei dem gedachten Induktor der Fall ist, der Ring werde von einem dem Raume nach gleich, relativ zum Ringe entgegengesetzt gerichteten Strome durchflossen, so haben die Drehungsmomente dasselbe Vorzeichen wie im ersten Falle.

Setzt man schliesslich für e und ϱ die den verschiedenen Ringen des Induktors entsprechenden Werte und bildet die Summe, so findet sich für die Drehungsmomente um die Z -, X - und Y -Axe, welche der Induktor in einer beliebigen Stellung ψ auf die Nadel ausübt,

$$10) \quad \begin{cases} \mathbf{D}_1 = 2 \pi m (\cos u \sin \psi - \cos v \cos \psi) \frac{E}{w} \cdot S, \\ \mathbf{D}_2 = - 2 \pi m (\cos w \sin \psi) \frac{E}{w} \cdot S, \\ \mathbf{D}_3 = 2 \pi m (\cos w \cos \psi) \frac{E}{w} \cdot S, \end{cases}$$

wobei

$$S = A - \lambda^2 B \left[(\cos u \cos \psi + \cos v \sin \psi)^2 - \frac{1}{5} \right]$$

$$A = \sum \sum \frac{\varrho^2}{[\varrho^2 + e^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \frac{15}{4} \sum \sum \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - 4 e^2)}{[\varrho^2 + e^2]^{\frac{7}{2}}}.$$

Die Werte S , A und B sind mit denjenigen unter 6) angegebenen identisch.

Die mittleren Drehungsmomente.

Aus den gefundenen Drehungsmomenten, welche für irgend eine Stellung ψ des Induktors gelten, lassen sich schliesslich die Mittelwerte der Drehungsmomente bestimmen, welche bei gleichförmiger Rotation einer Umdrehung des Induktors entsprechen.

Ist T die Umdrehungszeit des Induktors und sind $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ die mittleren Drehungsmomente, resp. um die Z -, X - und Y -Axe, so hat man

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{D}_1 dt,$$

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{D}_2 dt,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{D}_3 dt.$$

Es ist aber, wenn γ die konstante Drehungsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$T = \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \psi = \gamma t.$$

Demnach werden die Drehungsmomente, wenn ψ als Veränderliche eingeführt wird,

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{D}_1 d\psi,$$

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{D}_2 d\psi,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{D}_3 d\psi,$$

oder, indem man für $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$ ihre Werte einführt und nach Gleichung 7) $E = E_1 + E_2$ setzt,

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{m}{w} \left\{ \int_0^{2\pi} (\cos u \sin \psi - \cos v \cos \psi) S E_1 d\psi \right. \\ \left. + \sin w \int_{-z}^{2\pi-z} \sin x [A - \lambda^2 B (\sin w^2 \cos x^2 - \frac{1}{5})] E_2 dx \right\},$$

$$\mathfrak{D}_2 = -\frac{m}{w} \cos w \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \psi S E_1 d\psi \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin w} \int_{-z}^{2\pi-z} (\cos u \sin x + \cos v \cos x) \right. \\ \left. [A - \lambda^2 B (\sin w^2 \cos x^2 - \frac{1}{5})] E_2 dx \right\},$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{m}{w} \cos w \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \psi S E_1 d\psi \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin w} \int_{-z}^{2\pi-z} (\cos u \cos x - \cos v \sin x) \right. \\ \left. [A - \lambda^2 B (\sin w^2 \cos x^2 - \frac{1}{5})] E_2 dx \right\}.$$

Hierbei ist in den E_2 enthaltenden Gliedern an Stelle von ψ die Veränderliche

$$x = \psi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right)$$

eingeführt und zur Abkürzung

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right) = z$$

gesetzt worden.

Führt man endlich für E_1 und E_2 die unter 8) und 9) gefundenen Werte ein, so lässt sich die Integration ausführen. Man erhält alsdann, wenn man zur Abkürzung

$$A - \lambda^2 B \left(\frac{\sin w^2}{4} - \frac{1}{5} \right) = M, \quad \frac{1 + \left(\frac{p\gamma}{w} \right)^2}{1 + \left(\frac{3p\gamma}{w} \right)^2} \left(\lambda^2 B \frac{\sin w^2}{4} \right)^2 = N$$

setzt, für die drei mittleren Drehungsmomente um die Z-, X- und Y-Axe, welche aus der Induktion der erdmagnetischen Kraft, aus

der Induktion der in der Mitte des Induktors befindlichen Nadel und aus der Selbstinduktion hervorgehen,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{1}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \\ &\left\{ KFM \left[\cos u \cos U + \cos v \cos V + \frac{p\gamma}{w} (\cos v \cos U - \cos u \cos V) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\pi m \sin w^2 [M^2 + N] \right\}, \\ \mathfrak{D}_2 &= -\frac{m\pi\gamma}{w} \frac{\cos w}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \\ &\left\{ KF \left[M \left(\cos U - \frac{p\gamma}{w} \cos V \right) \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda^2 B \cos v}{2} \left(\cos v \cos U - \cos u \cos V - \frac{p\gamma}{w} (\cos u \cos U + \cos v \cos V) \right) \right] \\ &\quad + 2\pi m \left[M \left(M \left(\cos u - \frac{p\gamma}{w} \cos v \right) + \frac{\lambda^2 B \sin w^2}{2} \frac{p\gamma}{w} \cos v \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + N \left(\cos u - \frac{3p\gamma}{w} \cos v \right) \right] \right\}, \\ \mathfrak{D}_3 &= -\frac{m\pi\gamma}{w} \frac{\cos w}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \\ &\left\{ KF \left[M \left(\cos V + \frac{p\gamma}{w} \cos U \right) \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2 B \cos u}{2} \left(\cos v \cos U - \cos u \cos V - \frac{p\gamma}{w} (\cos u \cos U + \cos v \cos V) \right) \right] \\ &\quad + 2\pi m \left[M \left(M \left(\cos v + \frac{p\gamma}{w} \cos u \right) - \frac{\lambda^2 B \sin w^2}{2} \frac{p\gamma}{w} \cos u \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + N \left(\cos v + \frac{3p\gamma}{w} \cos u \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Diese Drehungsmomente haben eine ganz allgemeine Geltung für irgend eine Richtung U, V, W der erdmagnetischen Kraft und für irgend eine Richtung u, v, w der magnetischen Axe der Nadel. Der mit KF multiplizierte Ausdruck ist der Anteil am Drehungsmomente, welcher von der Induktion durch den Erdmagnetismus herührt, der mit $2\pi m$ multiplizierte Ausdruck dagegen stellt den Anteil dar, der durch die Induktion der Nadel erzeugt wird.

Anwendung der Formeln auf praktische Fälle.

Um auf die Induktion durch einen rotierenden Induktor praktische Messungen gründen zu können, müssen zwei beschränkende Bedingungen erfüllt sein. Es muss 1) *die Drehungsaxe des Induktors* (in unserem Falle die *Z-Axe*) *eine horizontale oder vertikale Stellung einnehmen*, und es muss 2) *die Magnetnadel in der Horizontalebene um eine vertikale Axe drehbar sein*. Die erste Bedingung ergibt sich aus dem Umstand, dass nur in den genannten Fällen die Lage der Drehungsaxe sich auf eine einfache Weise genau fixieren lässt. Die zweite Bedingung aber gründet sich darauf, dass für genauere Messungen die Nadel an einem Faden aufgehangen werden muss.

Ist zunächst die Drehungsaxe, d. i. die *Z-Axe*, vertikal, so ist der zweiten Bedingung gemäss

$$u + v = \frac{\pi}{2}, \quad w = \frac{\pi}{2},$$

wenn, wie hier vorausgesetzt werden soll, die Nadel so aufgehangen ist, dass ihre magnetische Axe in die Horizontalebene fällt. Dieser Aufstellung hat sich das Komitee der British Association zur Herstellung eines Standards für elektrischen Widerstand bedient. Man sieht jedoch, dass in diesem Falle *der Anteil, welchen die Induktion der Nadel an dem Gesamtdrehungsmomente hat, ein Maximum wird*.

Für das in der Horizontalebene, d. i. der *XY-Ebene*, ausgeübte Drehungsmoment folgt

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{1}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left\{ KFM \left[\cos u \cos U + \sin u \cos V + \frac{p\gamma}{w} (\sin u \cos U - \cos u \cos V) \right] \right. \\ \left. + 2\pi m (M^2 + N), \right.$$

wo jetzt

$$M = A - \frac{1}{26} \lambda^2 B, \quad N = \frac{1}{16} \frac{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2}{1 + \left(\frac{3p\gamma}{w}\right)^2} \lambda^4 B^2.$$

Lässt man die Richtung des magnetischen Meridians mit der positiven *X-Axe* zusammenfallen, und ist *i* die Inklination, *T* die horizontale Komponente des Erdmagnetismus, so wird

$$U = i, \quad V = \frac{\pi}{2}, \quad W = \frac{\pi}{2} + i.$$

Beträgt die Nadellänge etwa den fünften Teil des mittleren Induktordurchmessers, so kann man immer $N=0$ setzen und erhält in diesem Falle, da

ist, $K \cos i = T$

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{A - \frac{1}{20}\lambda^2 B}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left[TF \left(\cos u + \frac{p\gamma}{w} \sin u \right) + 2\pi m \left(A - \frac{1}{20}\lambda^2 B \right) \right]$$

in Übereinstimmung mit dem Ausdrucke, welcher in dem „Report of the thirty-third meeting of the British Association“, London 1864, S. 169, für dasselbe Drehungsmoment auf anderem Wege gefunden wurde, nur mit dem Unterschiede, dass in dem obigen Ausdrucke das von der Länge der Nadel abhängige Korrektionsglied berücksichtigt ist.

Liegt dem zweiten Falle entsprechend die Drehungsaxe, d. i. die Z -Axe, sowie die magnetische Axe der Nadel in der Horizontalebene und wird für letztere die ZX -Ebene angenommen, so findet sich für das mittlere Drehungsmoment in dieser Ebene, da alsdann

$$u + w = \frac{\pi}{2}, \quad v = \frac{\pi}{2}$$

zu setzen ist, bei Vernachlässigung von N

$$\mathfrak{D}_3 = - \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{\cos w}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left(M - \frac{\lambda^2 B \sin w^2}{2} \right) \left[KF \left(\cos V + \frac{p\gamma}{w} \cos U \right) + 2\pi m M \frac{p\gamma}{w} \sin w \right].$$

Lässt man die Drehungsaxe mit dem magnetischen Meridian zusammenfallen, so ist

$$U = \frac{\pi}{2}, \quad V = \frac{\pi}{2} + i, \quad W = i,$$

und folglich, wenn man für M seinen Wert setzt,

$$\mathfrak{D}_3 = + \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{\cos w}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left[A - \lambda^2 B \left(\frac{3}{4} \sin w^2 - \frac{1}{5} \right) \right] \left[TF \operatorname{tgi} - 2\pi m \frac{p\gamma}{w} \left(A - \lambda^2 B \left(\frac{\sin w^2}{4} - \frac{1}{5} \right) \right) \sin w \right].$$

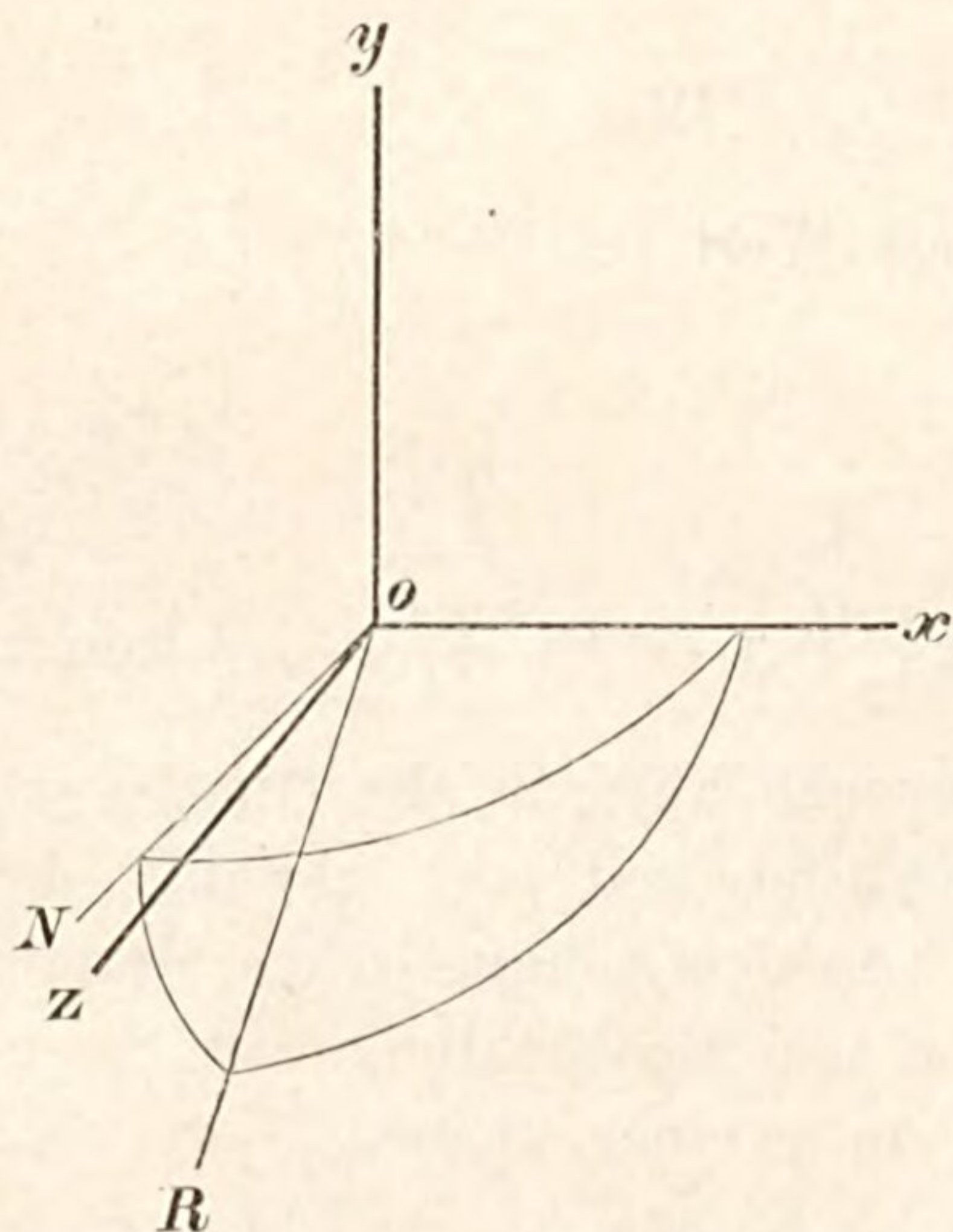
Ist der Widerstand der geschlossenen Kette w , die Dimensionen des Induktors und die Drehungsgeschwindigkeit γ so gewählt, dass der Ablenkungswinkel w der Nadel von dem magnetischen Meridian während der Rotation klein ist, was bei Beobachtung mit Spiegel und Skala notwendig ist, so besitzt $\sin w$ einen kleinen Wert, einen noch kleineren die Grösse $\frac{p\gamma}{w} \sin w$ und folglich kann der von der Induktion der Nadel herrührende Anteil des Drehungsmomentes nur klein sein,

Das Drehungsmoment ist positiv. Erfolgt demnach die Drehung des Induktors dem Gange eines Uhrzeigers entgegen bezüglich eines längs der Drehungsaxe von Norden nach Süden visierenden Beobachters, so wird der Nordpol der Nadel nach Westen abgelenkt. Die gleiche Ablenkung nach Osten erfährt die Nadel bei gleicher, aber entgegengesetzt gerichteter Drehungsgeschwindigkeit. Giebt man nämlich in dem obigen Ausdrucke γ und w das negative Vorzeichen, so ändert $\mathfrak{D}_3$ nur sein Vorzeichen, die Grösse bleibt dieselbe.

Der zweite der betreffenden Fälle hat den grossen Vorzug, die Möglichkeit zu geben, die Induktion der Nadel gänzlich zu beseitigen. Dreht man die Induktoraxe, während sie selbst in der Horizontalebene bleibt, der abgelenkten Nadel wie bei einer Sinusbussole soweit nach, bis dieselbe mit der magnetischen Axe der Nadel zusammenfällt, so wird alsdann $w = 0$ und der von der Nadelinduktion herführende Teil fällt weg.

Das vollständige Zusammenfallen der Drehungsaxe des Induktors mit der magnetischen Axe der Nadel ist praktisch infolge kleiner Schwankungen der Nadel schwer realisierbar. Es soll daher angenommen werden, dass die Drehungsaxe des Induktors nur näherungsweise mit der magnetischen Axe der Nadel zusammenfalle. Die Drehungsaxe sei der Nadel um den Winkel α nachgedreht worden, die magnetische Axe bilde mit der Drehungsaxe des Induktors den kleinen Winkel w , mit dem magnetischen Meridian also den Winkel $\alpha + w$.

Fig. 6.



Es sei (Fig. 6)

ON die Richtung des magnetischen Meridians,

OR die Richtung der erdmagnetischen Kraft,

$NO R = i$ die Inklination,

$NO Z = \alpha$ der Drehungswinkel, um welchen die Drehungsaxe der Nadel nachgedreht wurde,

$RO X = U$,

$RO Y = V$,

alsdann ist

$$\cos U = \cos i \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\cos i \sin \alpha$$

$$\cos V = \cos \left(\frac{\pi}{2} + i \right) = -\sin i$$

und das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment wird

$$11) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D}_3 &= + \frac{m \pi \gamma}{w} \frac{\cos w}{1 + \left(\frac{p \gamma}{w}\right)^2} \\ &\left(A - \lambda^2 B \left(\frac{3}{4} \sin w^2 - \frac{1}{5} \right) \right) \left[TF \left(\operatorname{tg} i + \frac{p \gamma}{w} \sin \alpha \right) \right. \\ &\left. - 2 \pi m \frac{p \gamma}{w} \sin w \left(A - \lambda^2 B \left(\frac{\sin w^2}{4} - \frac{1}{5} \right) \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Erfolgt die Drehung des Induktors in entgegengesetzter Richtung, d. i. in der Richtung von der positiven Y -Axe nach der positiven X -Axe, so wird die Nadel nach der entgegengesetzten Seite des Meridians abgelenkt und der Induktor ist in der Richtung XZ von der Meridianstellung aus nachzudrehen. Es sind dann γ , w und α negativ und das Drehungsmoment hat bei gleicher Grösse das negative Vorzeichen.

Gleichgewichtsgleichung der Nadel bei rotierendem Induktor.

Da die zuletzt betrachtete Lage der Drehungsaxe des Induktors erhebliche Vorteile darbietet, so soll dieselbe den nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Auf die in der Mitte des Induktors an einem Faden horizontal aufgehängene Nadel wirken ausser dem Drehungsmomente $\mathfrak{D}_3$ noch zwei andere Drehungsmomente, nämlich die Torsion des Aufhängefadens und das Drehungsmoment der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus. Die Nadel wird folglich in derjenigen Lage im Gleichgewicht verharren, für welche die Summe dieser drei Drehungsmomente gleich Null ist. Diese Gleichgewichtslage finde für $w = \omega$ statt, ausserdem soll vorausgesetzt werden, dass der Aufhängefaden in der Gleichgewichtslage detordiert sei, alsdann hat man für das Gleichgewicht die Gleichung

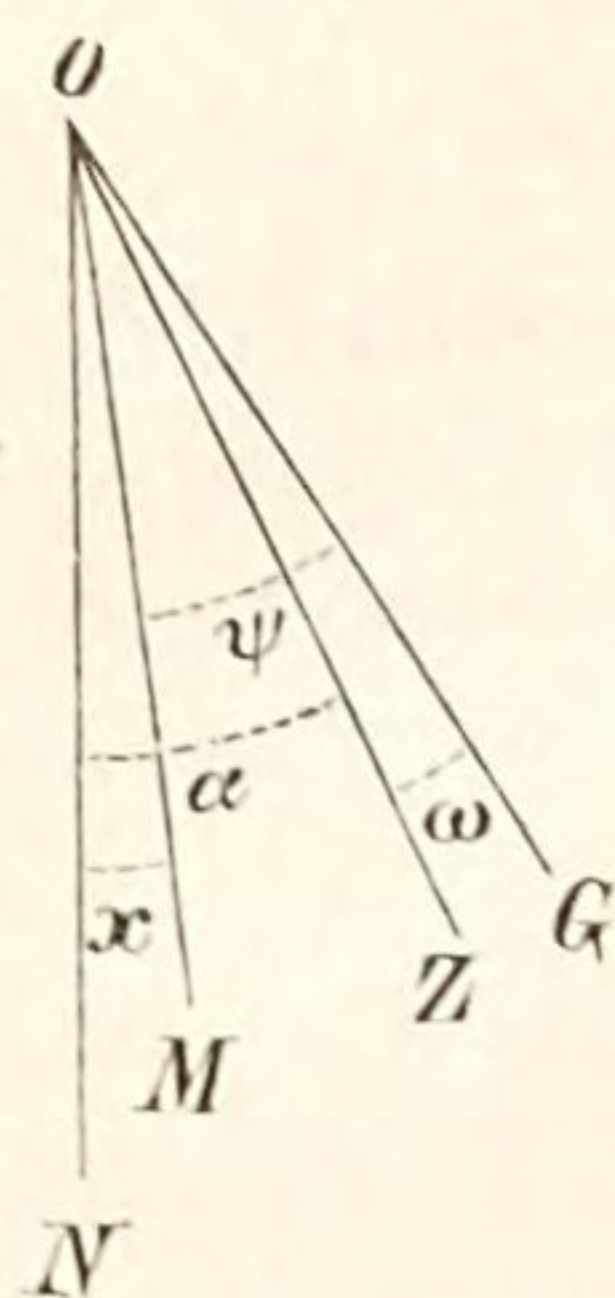
$$12) \quad \mathfrak{D}_3 - Tm \sin(\alpha + \omega) = 0,$$

wobei in $\mathfrak{D}_3$ ω für w zu setzen ist. Aus der Gleichung 11) ergibt sich hiernach für den Widerstand w der geschlossenen Kette

$$w = \frac{\pi \gamma}{\sin(\alpha + \omega)} \frac{\cos \omega}{1 + \left(\frac{p \gamma}{w}\right)^2} \left[A - \lambda^2 B \left(\frac{3}{4} \sin \omega^2 - \frac{1}{5} \right) \right] \\ \left[F \left(\operatorname{tg} i + \frac{p \gamma}{w} \sin \alpha \right) - 2 \pi \frac{m}{T} \frac{p \gamma}{w} \sin \omega \left(A - \lambda^2 B \left(\frac{\sin \omega^2}{4} - \frac{1}{5} \right) \right) \right].$$

Wird die Rotation des Induktors unterbrochen, so stellt sich die magnetische Axe der Nadel infolge der Torsion nicht genau in den magnetischen Meridian, sondern in eine Richtung OM (Fig. 7) ein, welche mit dem magnetischen Meridian ON den Winkel $NOM = x$ bilden möge. Für die Gleichgewichtslage der Nadel bei *ruhendem* Induktor hat man daher die Gleichung

Fig. 7.



$$\theta(\alpha + \omega - x) - \sin x = 0,$$

wenn mit θ der Torsionskoeffizient des Fadens bezeichnet wird. Darnach findet sich für x , welches immer einen kleinen Wert besitzt,

$$x = \frac{\theta}{1 + \theta}(\alpha + \omega).$$

Unmittelbar aus den Beobachtungen erhält man den Winkel MOG , welchen die Gleichgewichtslagen bei *rotierendem* und bei *ruhendem* Induktor mit einander einschliessen. Wird derselbe mit ψ bezeichnet, so ist

$$\psi = \alpha + \omega - x$$

und mithin, indem man für x seinen Wert setzt,

$$\alpha + \omega = (1 + \theta)\psi.$$

Durch geeignetes Nachdrehen des Induktor lässt sich stets erreichen, dass der Winkel ω zwischen der Gleichgewichtslage bei rotierendem Induktor und der Drehungsaxe äusserst klein ist. Man kann daher in dem Ausdrucke $w \cos \omega = 1$ setzen und alle mit dem Quadrate von $\sin \omega$ multiplizierten Grössen, die an sich schon kleine Korrektionsglieder bilden, vernachlässigen. Setzt man für $\alpha + w$ den oben gefundenen Wert ein, so ergibt sich hiernach

$$13) \left\{ \begin{aligned} w &= \frac{1}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \frac{\pi\gamma}{\sin[(1 + \theta)\psi]} \left(A + \frac{\lambda^2 B}{5}\right) \\ &\left[F\left(\operatorname{tg} i + \frac{p\gamma}{w} \sin \alpha\right) - 2\pi \frac{m}{T} \frac{p\gamma}{w} \sin \omega \left(A + \frac{\lambda^2 B}{5}\right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Hierin ist $\frac{p\gamma}{w}$ eine kleine Grösse (bei den nachfolgenden Versuchen fand sich $\frac{p\gamma}{w} = 0,1362$ für die Temperatur 15°C.), welche von der Induktion des Induktors auf sich selbst herrührt und durch besondere Versuche bestimmt werden kann.

Schwingungsgleichung der Nadel bei rotierendem Induktor.

Der Fall, dass die Nadel während der Drehung des Induktors vollkommen ruhend in ihrer Gleichgewichtslage verharret, tritt in Wirklichkeit nie streng ein. Teils infolge kleiner Änderungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit, teils durch den Umstand, dass die Nadel bei Beginn der Drehung sich in einer andern Ruhelage befindet, werden kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage hervorgerufen. Bei den nachfolgenden Versuchen wurde sogar die Nadel absichtlich in kleine Schwingungen versetzt, da sich die Gleichgewichtslage aus den beobachteten Umkehrungspunkten genauer als auf anderem Wege bestimmen liess.

Es ist leicht zu übersehen, dass bei hinreichender Drehungsgeschwindigkeit und langer Schwingungsdauer die Nadel ihre Schwingungen so ausführt, wie wenn der Induktor in Ruhe wäre und ein mittleres Drehungsmoment auf dieselbe ausübte. Streng genommen tritt noch eine mittlere Dämpfungskraft hinzu, die aus der Induktion resultiert, welche durch die Bewegung der Nadel gegen den rotierenden Induktor erzeugt wird. Wenn jedoch, wie hier vorausgesetzt werden soll, die Länge der Nadel im Verhältnis zu dem mittleren Durchmesser des Induktors klein ist, so kann die Dämpfung unberücksichtigt bleiben. Bei der folgenden Betrachtung sollen ausserdem alle Korrektionsglieder, welche den Polabstand enthalten, vernachlässigt werden.

Ist κ das Trägheitsmoment der Nadel, h das Drehungsmoment des Luftwiderstandes für die Winkelgeschwindigkeit eins der Nadel, ferner ω der Wert von w , für welchen der Faden detordiert ist, so gilt zur Zeit t die Gleichung

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{h}{\kappa} \frac{dw}{dt} + \frac{Tm}{\kappa} [\sin(\alpha + w) + \theta(w - \omega)] = \frac{\mathbf{D}_3}{\kappa},$$

wo $\mathbf{D}_3$ aus dem entsprechenden Werte Gleichung 10) gefunden wird, wenn daselbst

$$u + w = \frac{\pi}{2}, \quad v = \frac{\pi}{2}, \quad \cos U = -\cos i \sin \alpha, \quad \cos V = -\sin i, \quad \lambda = 0$$

gesetzt wird; nämlich

$$\mathbf{D}_3 = \frac{2\pi m \gamma}{w} \frac{\cos w}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} A \cos \psi$$

$$\left\{ T F \left[-\sin \alpha \sin \psi + \operatorname{tg} i \cos \psi + \frac{p\gamma}{w} (\sin \alpha \sin \psi + \operatorname{tg} i \cos \psi) \right] \right.$$

$$\left. + 2\pi m \sin w A (\sin \psi - \frac{p\gamma}{w} \cos \psi) \right\},$$

wofür man auch, da

$$\sin \psi \cos \psi = \frac{1}{2} \sin 2\psi, \quad \cos^2 \psi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\psi)$$

ist, schreiben kann

$$\mathbf{D}_3 = \mathfrak{D}_3 + P \cos w \sin 2\psi + Q \cos w \cos 2\psi,$$

wenn $\mathfrak{D}_3$ das mittlere Drehungsmoment (Gleichung 11) für $\lambda = 0$

$$P = \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{A}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left\{ T F \left(\frac{p\gamma}{w} \operatorname{tg} i - \sin \alpha \right) + 2\pi m \sin w A \right\}$$

$$Q = \frac{m\pi\gamma}{w} \frac{A}{1 + \left(\frac{p\gamma}{w}\right)^2} \left\{ T F \left(\frac{p\gamma}{w} \sin \alpha + \operatorname{tg} i \right) - 2\pi m \sin w A \frac{p\gamma}{w} \right\}$$

ist. Setzt man nun

$$w = \omega + \varphi,$$

wo ω wie oben den konstanten Winkel zwischen der Drehungsaxe und der Gleichgewichtslage bei rotierendem Induktor bezeichnet, so reduziert sich die Schwingungsgleichung unter Berücksichtigung der Gleichung 12), da w , ω , φ kleine Winkel sind, und folglich $\sin \omega \sin \varphi = 0$, $\cos \omega \cos \varphi = 1$ gesetzt werden darf, auf die einfachere Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{h}{\alpha} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{Tm}{\alpha} (1 + \theta) \varphi = P \sin 2\psi + Q \cos 2\psi.$$

Diese Gleichung zeigt, dass sich die Bewegung der Nadel bei rotierendem Induktor aus zwei verschiedenen Schwingungen zusammensetzt, nämlich aus Schwingungen um die Gleichgewichtslage ω und aus Schwingungen, welche verschwinden, wenn das Verhältniß der Umdrehungszeit T zur Schwingungsdauer τ_0 der Nadel klein ist.

Man findet nämlich, wenn man für ψ seinen Wert $\gamma t = \frac{2\pi}{T}t$ einführt und mit λ_0 das logarithmische Dekrement der Luftdämpfung bezeichnet

$$\begin{aligned}
\varphi = & e^{-\frac{\lambda_0}{\tau_0} t} \left(C_1 \sin \frac{\pi}{\tau_0} t + C_2 \cos \frac{\pi}{\tau_0} t \right) \\
& + \frac{P}{\frac{2\pi}{\tau_0} \frac{4\pi}{T}} \left\{ - \frac{\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0} \cos \frac{4\pi}{\tau_0} t + \left(1 - \frac{T}{4\tau_0}\right) \sin \frac{4\pi}{\tau_0} t}{\left(\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{T}{4\tau_0}\right)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0} \cos \frac{4\pi}{\tau_0} t + \left(1 + \frac{T}{4\tau_0}\right) \sin \frac{4\pi}{\tau_0} t}{\left(\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{T}{4\tau_0}\right)^2} \right\}, \\
& + \frac{Q}{\frac{2\pi}{\tau_0} \frac{4\pi}{T}} \left\{ \frac{\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0} \sin \frac{4\pi}{\tau_0} t - \left(1 - \frac{T}{4\tau_0}\right) \cos \frac{4\pi}{\tau_0} t}{\left(\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{T}{4\tau_0}\right)^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0} \sin \frac{4\pi}{\tau_0} t - \left(1 + \frac{T}{4\tau_0}\right) \cos \frac{4\pi}{\tau_0} t}{\left(\frac{\lambda_0 T}{4\pi \tau_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{T}{4\tau_0}\right)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Ist das Verhältniss $\frac{T}{4\tau_0}$ klein gegen 1, so fallen die beiden letzten Glieder fort, und die Nadel schwingt unter Einwirkung der Luftdämpfung um die Gleichgewichtslage ω . Es lässt sich alsdann aus den beobachteten Umkehrungspunkten die Gleichgewichtslage ω nach bekannten Regeln bestimmen.

Äquivalenz der Windungen des Induktors und eines Systems von Ringen.

Die Gleichung 13) gestattet den Widerstand des in sich geschlossenen Induktors zu bestimmen, wenn ψ , ω und α durch direkte Beobachtungen, die Inklination i , das Verhältniss des magnetischen Momentes der Nadel zu der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus $\frac{m}{T}$ und das von der Selbstinduktion abhängige Korrektionsglied $\frac{p\gamma}{w}$ durch besondere Messungen bekannt und endlich die Konstanten des Induktors A , B und F gegeben sind. Eine exakte Bestimmung der letzteren Konstanten ist von besonderer Wichtigkeit, nicht allein weil die Genauigkeit der Widerstandsbestimmung überhaupt wesentlich von ihnen abhängt, sondern auch deshalb, weil

sie sich nach Herstellung des Induktors ohne Abwicklung des Induktordrahtes nicht kontrollieren lassen. Ihre Grösse und ihre Bestimmung hängt ausser von den Dimensionen des Induktors noch insbesondere von der Art der Wickelung ab, zumal, wie es hier der Fall war, wenn der zur Konstruktion verwendete Draht einen grossen Durchmesser besitzt. Es soll daher dieselbe hier näher erörtert werden.

Der zu den Versuchen angewandte Induktor* bestand aus einem aus vielen Teilen zusammengeleimten Holzring von völlig trockenen Mahagoniholz. In die äussere Cylinderfläche dieses Ringes waren zwei Nuten von gleicher Grösse und von rechteckigem Querschnitt eingedreht, welche zur Aufnahme der Drahtwindungen dienten. Die Breite jeder Nute war so gewählt, dass dieselbe *genau* durch 15 Drahtdicken des übersponnenen Drahtes ausgefüllt wurde. Die Anzahl der übereinander gewundenen Horizontalschichten betrug für jede Nute 6. Endlich bestand der Draht aus Kupfer von bester Leitungsfähigkeit, dessen Anfertigung Siemens & Halske gütigst übernommen hatten. Derselbe war doppelt mit weisser Baumwolle übersponnen und hatte inklusive der Umspinnung einen Durchmesser von 2,883 Millimeter.

Es stelle Taf. I Fig. 1 den Querschnitt des Induktors dar, den man erhält, wenn man durch die Eintrittsstellen 0 des Drahtes in die Nuten (beide lagen in einer und derselben Ebene) und durch die Axe des Induktorringes eine Ebene legt. $ABCD$, $A'B'C'D'$ sind die Querschnitte der Nuten, während die Mitte der Nadel mit dem Punkt O zusammenfällt. Die mit den Zahlen 0, 1, 2, ... bezeichneten Kreisflächen stellen die Drahtquerschnitte der Umwindungen dar. Sie sind verhältnissmässig zu gross gezeichnet, und ausserdem ist der Einfachheit wegen vorausgesetzt worden, dass schon 6 Drahtdicken die Breite der Nute ausfüllen. Der Draht wurde durch die Seitenwand in die Nuten eingeführt und in eine in die Grundfläche der Nute eingearbeitete Rille eingelegt, deren Tiefe an der Einführungsstelle der Drahtdicke gleich war, welche jedoch längs der Seitenwand der Nute hinlaufend mehr und mehr an Tiefe abnahm, so dass sie nach einem 180 Grad entsprechenden Bogen in die Grundfläche der Nute überging. Der in die Rille eingelegte Draht beschreibt zwischen 0 und 1 ein Stück einer archimedischen Spirale, indem er um eine Drahtdicke ansteigt. Von nun an war der Draht in Schraubewindungen um die Grundfläche der Nuten herumgeführt, und zwar

* Eine genauere Beschreibung des Induktors folgt später S. 67.

so, dass die Steigung der Schraubenlinie pro Windung eine Drahtdicke betrug. Bei der ersten Schraubenwindung konnte dies dadurch erreicht werden, dass kleine Stücke eines Holzcyinders, dessen Dicke der des Drahtes gleich war, in geeigneten Abständen zwischen Wandung und Drahtwindung eingelegt wurden. Je nach der Stelle, wo das Einlegen des Holzstückchens stattfand, wurde von demselben in der Längsrichtung so viel abgefeilt, dass die Dicke des übrigbleibenden Cylinderstückes dem Abstand entsprach, welchen der Draht an jener Stelle von der Wandung besitzen musste, um einen regelrechten Schraubengang zu beschreiben. Von 1 ausgehend wurden z. B. an den Stellen, die den Bögen $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{2}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ entsprachen, Cylinderstücke angewendet, welche bis zu $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ ihres Durchmessers abgefeilt waren. Der in Taf. I Fig. 1 neben 2, 10, 13, 21 liegende schraffierte Halbkreis stellt den Querschnitt eines bis zur Hälfte abgefeilten Cylinderstückes aus Holz dar. Die Windungen (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9) ... legten sich unmittelbar an die erste Windung an. 1 und 11 bilden den Anfang und das Ende der ersten Horizontalschicht.

Die von 11 um $\frac{\pi}{2}$ bis 12 weitergeführte halbe Windung vermittelt den Übergang zu der zweiten Horizontalschicht. Sie verläuft zur Wandung parallel und beschreibt ein Stück einer archimedischen Spirale. Die Windungen (12, 13, 14), (14, 15, 16), ... (20, 21, 22), welche die zweite Horizontalschicht bilden, sind wiederum Schraubenwindungen mit einer der Drahtdicke gleichen Steigung pro Umwindung. Die halbe, zur Seitenwand parallele Windung (22, 23) vermittelt den Übergang zur dritten Horizontalschicht u. s. f.

Da im ganzen in jeder Nute sechs Horizontalschichten aufgewickelt wurden, so musste der Endpunkt der sechsten Schicht unterhalb von 22 zu liegen kommen, von wo er nach aussen weitergeführt wurde.

Wie man sieht, zerfällt der so in jeder Nute aufgewundene Draht in zwei Teile, nämlich 1) in denjenigen Teil, welcher in Schraubenwindungen verlaufend die horizontalen Schichten bildet, 2) in denjenigen Teil, welcher die Verbindung der einzelnen Horizontalschichten untereinander vermittelt. Letzterer besteht aus Drahtlängen, welche Stücken einer archimedischen Spirale bilden.

Die Wirkung einer Schraubenwindung auf die in O befindliche Nadel lässt sich nun, wenn die Nadellänge gegen den mittleren Durchmesser der Windungen und die Höhe eines Schraubenganges gegen den Radius der Schraubenwindungen klein ist, stets durch

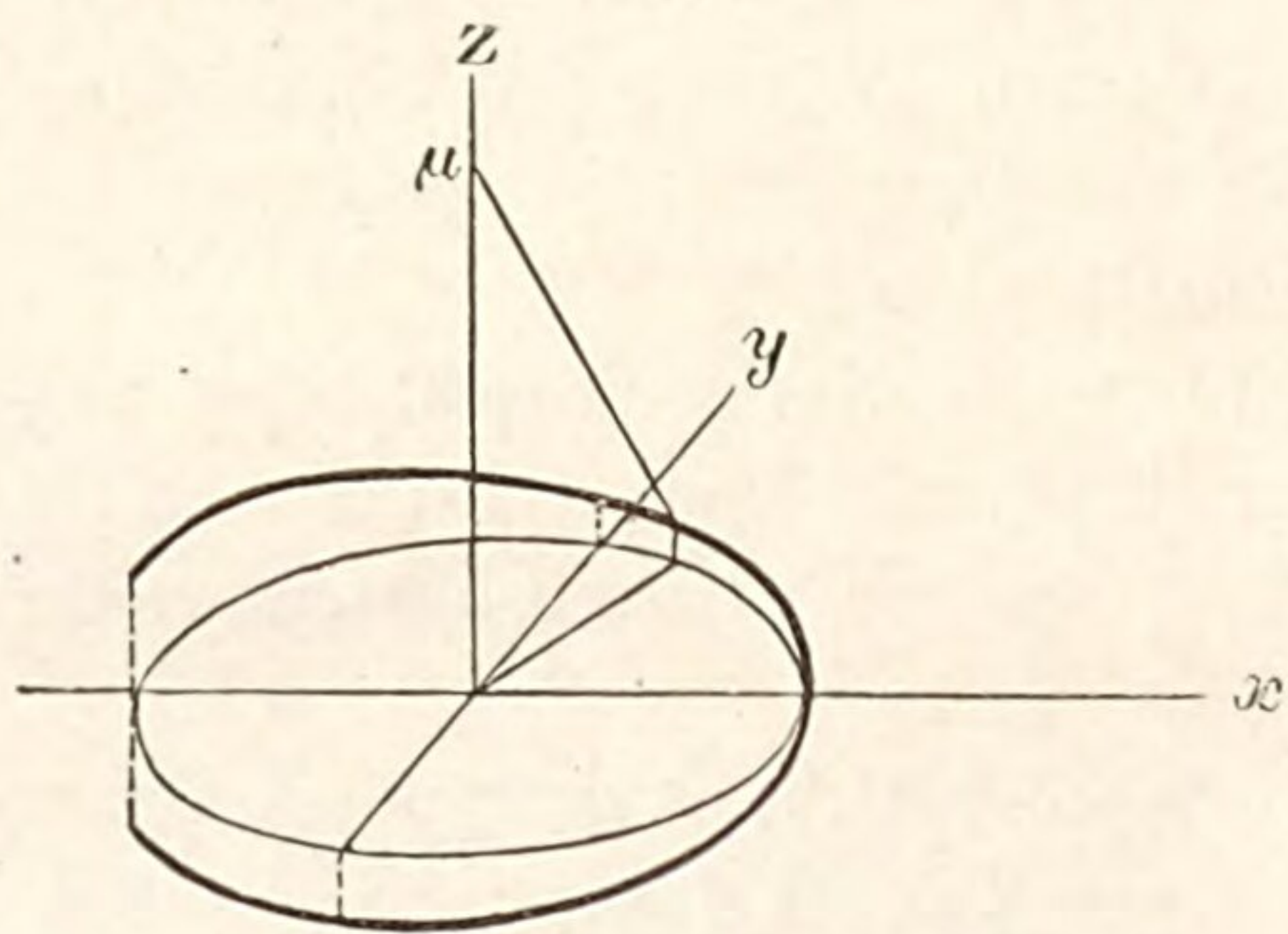
die Wirkung eines geschlossenen Ringes ersetzen, welcher mit der Schraubenwindung den Radius gemein hat, und dessen Ebene mit einer zur Nutenwand parallelen Ebene zusammenfällt, welche durch den Halbierungspunkt des Schraubenganges gelegt ist. So wird z. B. die Schraubenwindung (7, 8, 9) durch den Ring ab ersetzt.*

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass sämtliche Horizontalschichten durch ein System von Ringen ersetzt werden können, welche horizontale und vertikale Schichten bilden, da, wie leicht zu übersehen, die Drahtaxen der einzelnen Ringe in der zweiten, dritten ... Schicht in vertikale Ebenen fallen, welche durch die Ringe der ersten Schicht gelegt werden. Bei dem Induktor, wo die Breite der Nute 15 Drahtdicken gleich ist, und 6 Schichten aufgewunden sind, wird jede Horizontalschicht durch 14 Ringe, jede Vertikalschicht durch 6 Ringe gebildet. Dabei stehen die durch die Drahtaxen der Ringe gelegten Vertikalebene, welche die seitliche Begrenzung bilden, um eine Drahtdicke von der ihnen zunächstliegenden Wand der Nute ab.

Da je zwei in gleichem Abstand von O liegende Ringe von gleichem Radius auf die in O befindliche Nadel eine gleiche Wirkung ausüben, so hat man die Wirkung der Horizontalschichten einer Nute

* In dem einfachen Falle, wo in der Axe der Schraubenwindung eine magnetische Menge μ in der Entfernung z von dem äquivalenten Ringe sich befindet, lässt sich die Äquivalenz leicht nachweisen. Ist nämlich r der Radius

Fig. 8.



des Cylinders, auf welchem sich der Schraubengang befindet, i die Intensität des Stromes, so ist die zu z parallele Komponente Z , welche der Ring auf μ ausübt,

$$Z = \frac{2\pi\mu i r^2}{[r^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}};$$

die zu z senkrechten Komponenten sind gleich Null.

Ist andererseits ω die Steigung der Schraubenlinie, so ist $\pi r \operatorname{tg} \omega$ die Höhe eines halben Schraubenganges.

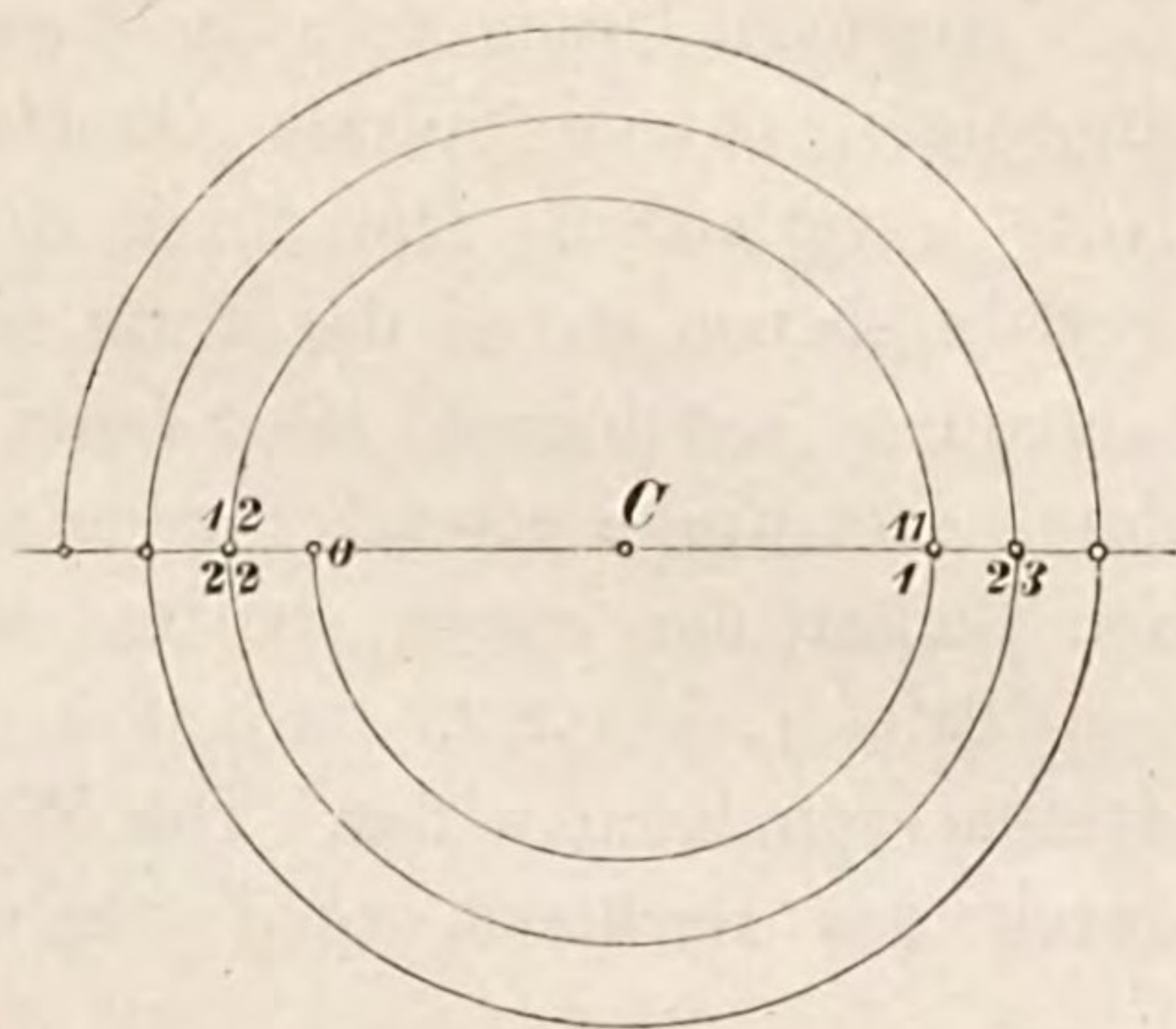
Wir setzen zur Abkürzung $\frac{\pi r \operatorname{tg} \omega}{z} = \kappa$, wo dann κ eine kleine Grösse ist. Es bilde nun der Mittelpunkt des äquivalenten Kreises den Anfangspunkt eines Koordinatensystems XYZ , bei welchem die Z -Axe mit der Axe der Schraubenwindungen zusammenfällt, und die X -Axe durch den der Schraubenlinie und dem Kreise gemeinschaftlichen Punkt hindurch geht: Wird das Azimuth eines Elementes ds in der Richtung von X nach Y gezählt und durch φ bezeichnet, so sind die Koordinaten von ds

$$r \cos \varphi, \quad r \sin \varphi, \quad r \varphi \operatorname{tg} \omega$$

nur zu verdoppeln, um die Wirkung sämtlicher in beiden Nuten verteilter Horizontalschichten zu erhalten.

Ausser der Wirkung der Schraubenwindungen des Induktordrahtes, welche die Horizontalschichten bilden, bleibt noch diejenige der Drahtstücke zu erörtern übrig, durch welche die Verbindung der Schichten untereinander hergestellt wird. Die Wirkung der Verbindungsstücke der Nute 2 auf die Nadel bei rotierendem Induktor bleibt die gleiche, wenn man sich dieselben in korrespondierende Entfernungen von O nach der Nute 1 versetzt denkt. Die Verbindungsstücke in der ersten Nute zwischen der nullten und ersten Schicht (0, 1), zwischen der zweiten und dritten Schicht (22, 23), zwischen der vierten und fünften Schicht bilden (Figur 9) zusammen mit den in gleichem Abstände von O befindlichen Verbindungsstücken der zwei-

Fig. 9.



und die Komponenten der auf μ von ds ausgeübten Kraft in der Richtung der X-, Y- und Z-Axe

$$\begin{aligned} & + \frac{i\mu ds}{\varrho^3} [r \sin \omega \sin \varphi - (r \varphi \operatorname{tg} \omega - z) \cos \varphi], \\ & - \frac{i\mu ds}{\varrho^3} [r \sin \omega \cos \varphi + (r \varphi \operatorname{tg} \omega - z) \sin \varphi], \\ & + \frac{i\mu ds \cdot r}{\varrho^3}, \end{aligned}$$

wo $\varrho = \sqrt{r^2 + (r \varphi \operatorname{tg} \omega - z)^2}$ die Entfernung (μds) bezeichnet. Hieraus ergibt sich für die Z-Komponente, da $ds = \frac{r}{\cos \omega} d\varphi$ ist,

$$Z = \frac{i\mu r^2}{\cos \omega} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{\left[r^2 + z^2 - \frac{2z^2\kappa}{\pi} \varphi + \frac{z^2\kappa^2}{\pi^2} \varphi^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$Z = \frac{\pi \mu i}{\kappa \cos \omega} \left[\frac{\kappa - 1}{[r^2 + z^2 - 2z^2\kappa + z^2\kappa^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\kappa + 1}{[r^2 + z^2 + 2z^2\kappa + z^2\kappa^2]^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Entwickelt man nach steigenden Potenzen von κ und vernachlässigt die mit den zweiten und höheren Potenzen von κ multiplizierten Glieder, so folgt, da $\cos \omega = 1$ gesetzt werden darf,

$$Z = \frac{2\pi \mu i r^2}{[r^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso ergibt sich für die beiden anderen Komponenten $X=0$, $Y=0$.

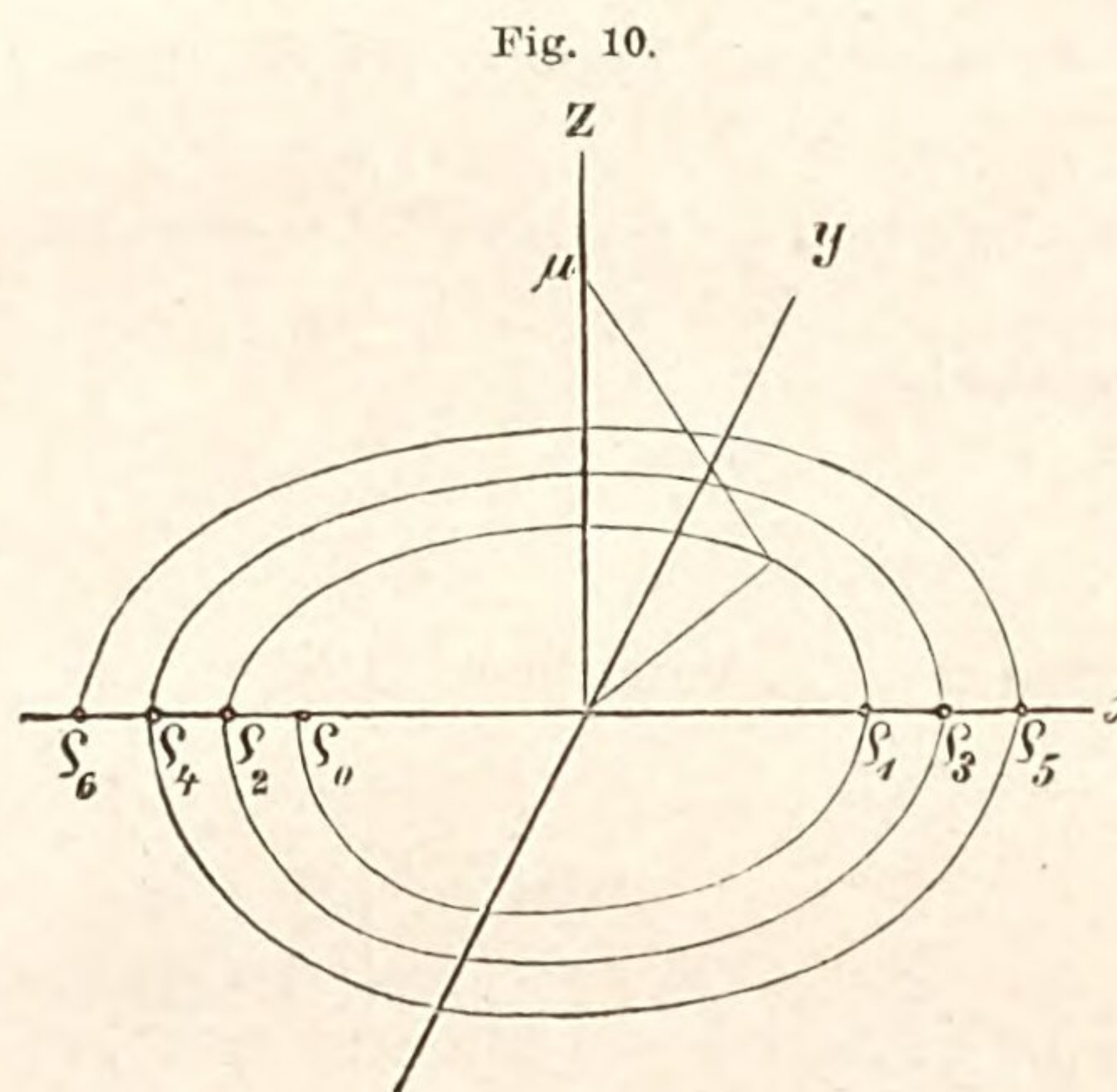
ten Nute, nämlich zwischen der ersten und zweiten Schicht (11, 12), zwischen der dritten und vierten Schicht und zwischen der fünften und sechsten Schicht eine archimedische Spirale.

Ein gleiches gilt für diejenigen Verbindungsstücke der Nuten 1 und 2, welche sich auf den einander zugewandten Seiten der Nuten befinden.

Hiernach lassen sich die Wirkungen der Verbindungsstücke durch diejenigen zweier Spiralen ersetzen, welche zu beiden Seiten der Nute 1 verlaufen. Die durch die Drahtaxen der Spiralen gelegten Vertikalebene stehen dabei um eine halbe Drahtdicke von der nächstliegenden Nutenwand ab. Jede der beiden Spiralen kann endlich durch drei Ringe ersetzt werden mit den Radien $C1, C23 \dots$, welche den Radien der ersten, dritten und fünften Schicht gleich sind.*

Tafel I, Figur 2 stellt das den Induktorwindungen äquivalente System von Ringen dar. Die Wirkung der Ringe, deren Drahtaxen durch das Rechteck $abcd$ begrenzt sind, ist *doppelt* zu nehmen,

* Es sei, um nur den einfachsten Fall ins Auge zu fassen, die nordmagnetische Menge μ in der Entfernung Z von der Mitte der Spirale auf der Axe



derselben gelegen. $\varrho_0, \varrho_1, \dots \varrho_6$ seien die Radien der Drahtaxen der nullten, ersten, ... sechsten Schicht. Der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems XYZ (Figur 10) falle mit der Mitte der Spirale zusammen und die X - und Z -Axe mögen die Richtungen von ϱ_1 und Z besitzen. Das Azimuth φ eines Elementes ds werde von X aus in der Richtung von X nach Y gezählt, alsdann ist die Gleichung der durch die Punkte $r = \varrho_0, r = \varrho_1, r = \varrho_2$ gelegten archimedischen Spirale

$$r = \varrho_1 + \frac{\varrho_2 - \varrho_0}{2} \frac{\varphi}{\pi},$$

oder, wenn die gegen ϱ_1 als klein vorausgesetzte Grösse $\frac{\varrho_2 - \varrho_0}{2} = \kappa$ gesetzt wird,

$$r = \varrho_1 + \frac{\kappa}{\pi} \varphi.$$

Ist i die Intensität des Stromes, welcher die Spirale durchströmt, so erhält man für die Komponenten eines Elementes $ds = d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\kappa}{\pi}\right)^2}$ des Spiralganges $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ bezüglich der drei Axen X, Y, Z

während diejenige der Ringe α, β, γ und α', β', γ' , welche in der ersten, dritten und fünften Horizontalschicht gelegen sind, nur *einfach* in Rechnung zu bringen ist. Auf den Induktor waren im ganzen 174 Windungen aufgewunden worden, ihnen entsprechen 174 Ringe.

Streng genommen bilden nur die Windungen der ersten Schicht eine *cylindrische* Schraube. Bei den folgenden Schichten nehmen die Windungen eine ovale Form an, da sie sich jedesmal in dem Tafel I, Figur 1 gezeichneten Querschnitte ganz in die Rillen einlegen, welche die Windungen der vorhergehenden Schicht zwischen sich lassen, während die Windungen zweier aufeinander lagernder Schichten sich jedesmal in einer zu der gezeichneten senkrechten Ebene kreuzen. Abgesehen davon, dass der Induktor nur wenige übereinander lagernde Schichten enthält, elimiert sich der hieraus hervorgehende Fehler dadurch, dass die Radien der Schichten aus ihren Umfängen bestimmt wurden.

$$\begin{aligned} & + \frac{i \mu z d \varphi}{[r^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\kappa}{\pi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right), \\ & - \frac{i \mu z d \varphi}{[r^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\kappa}{\pi} \cos \varphi - r \sin \varphi \right), \\ & + \frac{i \mu r^2 d \mu}{[r^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

und hieraus die der Z-Axe parallele Komponente des Spiralenganges q_0, q_1, q_2

$$\begin{aligned} Z &= i \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(q_1 + \frac{\kappa}{\pi} \varphi \right)}{\left[\left(q_1 + \frac{\kappa}{\pi} \varphi \right)^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d \varphi \\ &= \frac{i \mu}{a} \left\{ - \frac{q_1 + \kappa}{V(q_1 + \kappa)^2 + z^2} + \frac{q_1 - \kappa}{V(q_1 - \kappa)^2 + z^2} + \lg \frac{q_1 + \kappa + V(q_1 + \kappa)^2 + z^2}{q_1 - \kappa + V(q_1 - \kappa)^2 + z^2} \right\}. \end{aligned}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von κ und vernachlässigt die mit der zweiten und höheren Potenz von κ multiplizierten Glieder, so folgt

$$Z = \frac{2 \pi \mu i q_1^2}{[q_1^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Komponenten parallel der X- und Y-Axe werden Null. Das gleiche Resultat ergibt sich bezüglich des zweiten und dritten Spiralenganges, deren Gleichungen in die Form

$$\begin{aligned} r &= q_3 + \frac{q_4 - q_2}{2} \varphi, \\ r &= q_5 + \frac{q_6 - q_4}{2} \varphi \end{aligned}$$

gesetzt werden können.

Berechnung der Konstanten des Induktors A , B und F .

Nach Seite 14 und 22 hat man für die Konstanten des Induktors A und B

$$A = \sum \sum \frac{\varrho^2}{[e^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B = \frac{15}{4} \sum \sum \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - 4e^2)}{[e^2 + \varrho^2]^{\frac{7}{2}}},$$

wobei die Doppelsumme die Summe über sämtliche Ringe bedeutet. Sind e' und e'' (Tafel I, Figur 1) die Abstände der durch die Drahtaxen von α , β , γ und α' , β' , γ' gelegten Vertikalebene von dem Anfangspunkt O des Koordinatensystems, sind ferner $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_6$ die Radien der Drahtaxen der sechs Horizontalschichten, so wird

$$A + H_1 + 2 \sum \sum \frac{\varrho^2}{[e^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}},$$

wo sich die Doppelsumme auf alle Ringe innerhalb des Raumes $abcd$ erstreckt und

$$H_1 = \frac{\varrho_1^2}{[e'^2 + \varrho_1^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varrho_3^2}{[e'^2 + \varrho_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varrho_5^2}{[e'^2 + \varrho_5^2]^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{\varrho_1^2}{[e''^2 + \varrho_1^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varrho_3^2}{[e''^2 + \varrho_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varrho_5^2}{[e''^2 + \varrho_5^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ist.

Ebenso hat man

$$B = \frac{15}{4} \left\{ H_2 + 2 \sum \sum \frac{\varrho^2 (\varrho^2 + 4e^2)}{[e^2 + \varrho^2]^{\frac{7}{2}}} \right\},$$

wo

$$H_2 = \frac{\varrho_1^2 (\varrho_1^2 - 4e'^2)}{[e'^2 + \varrho_1^2]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\varrho_3^2 (\varrho_3^2 - 4e'^2)}{[e'^2 + \varrho_3^2]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\varrho_5^2 (\varrho_5^2 - 4e'^2)}{[e'^2 + \varrho_5^2]^{\frac{7}{2}}} \\ + \frac{\varrho_1^2 (\varrho_1^2 - 4e''^2)}{[e''^2 + \varrho_1^2]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\varrho_3^2 (\varrho_3^2 - 4e''^2)}{[e''^2 + \varrho_3^2]^{\frac{7}{2}}} + \frac{\varrho_5^2 (\varrho_5^2 - 4e''^2)}{[e''^2 + \varrho_5^2]^{\frac{7}{2}}}$$

ist. Die Doppelsummen lassen sich auf einfache Summen zurückführen, indem man die Summation in Bezug auf e ausführt. Wird nämlich eine Horizontalschicht ad durch n Drähte (in unserem Falle 14) gebildet, deren Axen um Δe von einander abstehen, und bezeichnet man den Abstand der Ebene ab von dem Anfangspunkt O des Koordinatensystems mit e_0 , so hat man eine Summe zu bilden von der Form

$$f(e_0) + f(e_0 + \Delta e) + \dots + f(e_0 + n - 1 \Delta e),$$

welche nach Euler gleich

$$\frac{1}{\Delta e} \left[\int_{e_0}^{e_0 + n\Delta e} f(e) de - \frac{1}{2} [f(e_0 + n\Delta e) - f(e_0)] \Delta e \right]$$

gesetzt werden darf, wenn man die Glieder höherer Ordnung, welche mit der dritten oder einer höheren Potenz von Δe multipliziert sind, vernachlässigt.

Hiernach erhält man

$$A = H_1 + 2 \sum \left\{ \frac{1}{\Delta e} \left[\frac{e_0 + n\Delta e}{\sqrt{\varrho^2 + (e_0 + n\Delta e)^2}} - \frac{e_0}{\sqrt{\varrho^2 + e_0^2}} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\varrho^2}{[\varrho^2 + (e_0 + n\Delta e)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varrho^2}{[\varrho^2 + e_0^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \right\},$$

$$B = \frac{15}{4} \left[H_2 + 2 \sum \left\{ \frac{1}{\Delta e} \left[\frac{\varrho^2 (e_0 + n\Delta e)}{[\varrho^2 + (e_0 + n\Delta e)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{\varrho^2 e_0}{[\varrho^2 + e_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\varrho^2 [\varrho^2 - 4(e_0 + n\Delta e)^2]}{[\varrho^2 + (e_0 + n\Delta e)^2]^{\frac{7}{2}}} - \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - 4e_0^2)}{[\varrho^2 + e_0^2]^{\frac{7}{2}}} \right] \right\} \right].$$

Zur Bestimmung der Konstanten wurde zunächst der Umfang der Grundfläche und der Horizontalschichten für jede der beiden Nuten mit grösster Genauigkeit bestimmt. Um die Aufwindung des Drahtes vornehmen zu können, war der Induktor mit einer Axe versehen worden, welche mit derjenigen des Induktorringes zusammenfiel. Der Draht wurde von der in einiger Entfernung vom Induktor aufgestellten Rolle, welche den Draht in regelmässigen Windungen und ohne jeden Knick enthielt, direkt auf den Induktor übergeführt, dabei wickelte sich derselbe infolge von Bremsen der Axe jener Rolle unter konstanter Spannung auf. Das Aufwickeln wurde langsam, Windung für Windung mit grösster Regelmässigkeit ausgeführt, und zugleich die Anzahl der Windungen gezählt. Ausserdem liess man einen an der Axe des Induktors befestigten gespannten Faden auf der Axe auflaufen und unterwarf durch nachherige Abwicklung die Windungszahl einer Kontrolle.

Zur Bestimmung der Umfänge diente ein Papierstreifen, wie er bei der Telegraphie verwendet wird. Derselbe wurde unter konstanter Spannung um die Grundfläche oder Horizontalschicht parallel zur Nutenwand herumgelegt, während sein freies Ende über eine Rolle führte, jenseits deren derselbe durch ein Gewicht P gespannt wurde. Nachdem der Streifen soweit aufgewunden war, dass sich ein kleiner Teil überdeckte, durchstach man die übereinander liegende Stelle mit

einer feinen Nadelspitze, wickelte den Streifen ab und befestigte ihn mit dem einen Ende an einer horizontalen Tischplatte, während sein anderes Ende über eine der früheren gleiche Rolle, deren Umfang die Tischhöhe besass, führte und durch dasselbe Gewicht P gespannt war. Durch Auflegen eines kurz vor den Messungen von der Kaiserlichen Aichungskommission geprüften Doppelometers konnte unter Anwendung einer Lupe der Abstand der Nadelstiche und damit der Umfang auf das genaueste gemessen werden. Nach dieser Methode, welche bereits von Wilhelm Weber* angewendet wurde, erhielt man beträchtlich genauere Werte als unter Anwendung eines Stahlbandes, mit welchem probeweise Versuche ausgeführt worden waren, da dessen Dicke nicht ohne Einfluss war.

Der Umfang der Grundfläche und jeder Schicht in beiden Nuten wurde auf die beschriebene Weise an drei verschiedenen Stellen gemessen, nämlich an dem rechten und linken Rande und in der Mitte der Nute. Dabei wurde jede Messung nochmals kontrolliert. Die Messungen führten zu folgenden Resultaten, bei denen stets das Millimeter die Längeneinheit bildet.

	Nute 1.	Nute 2.
	Umfang der Grundfläche:	
Rand rechts	{ 1607,4 1607,1	{ 1606,9 1606,9
Mitte	{ 1607,2 1607,2	{ 1607,1 1607,1
Rand links	{ 1606,9 1606,8	{ 1607,35 1607,50
Mittelwert	1607,10	1607,14
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1607,00	1607,04
	Umfang der ersten Horizontalschicht:	
Rand rechts	1624,4	1624,8
Mitte	1625,3	1624,7
Rand links	1625,0	1625,2
Mittelwert	1624,90	1624,90
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1624,80	1624,80

* Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, 1880, S. 114.

	Nute 1.	Nute 2.
Umfang der zweiten Horizontalschicht:		
Rand rechts	1641,3	1640,3
Mitte	1641,6	1640,5
Rand links	1641,0	1640,3
Mittelwert	1641,30	1640,37
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1641,20	1640,27

Umfang der dritten Horizontalschicht:		
Rand rechts	1657,0	1657,1
Mitte	1657,8	1657,1
Rand links	1657,7	1657,9
Mittelwert	1657,50	1657,37
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1657,40	1657,27

Umfang der vierten Horizontalschicht:		
Rand rechts	1673,7	1673,6
Mitte	1673,6	1673,7
Rand links	1673,6	1673,9
Mittelwert	1673,63	1673,73
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1673,53	1673,63

Umfang der fünften Horizontalschicht:		
Rand rechts	1689,5	1689,3
Mitte	1689,4	1689,6
Rand links	1689,5	1690,5
Mittelwert	1689,47	1689,80
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1689,37	1689,70

Umfang der sechsten Horizontalschicht:		
Rand rechts	1705,9	1705,7
Mitte	1706,3	1706,0
Rand links	1705,5	1706,4
Mittelwert	1705,90	1706,03
Korrektion des Maassstabes —	0,10	0,10
	1705,80	1705,93

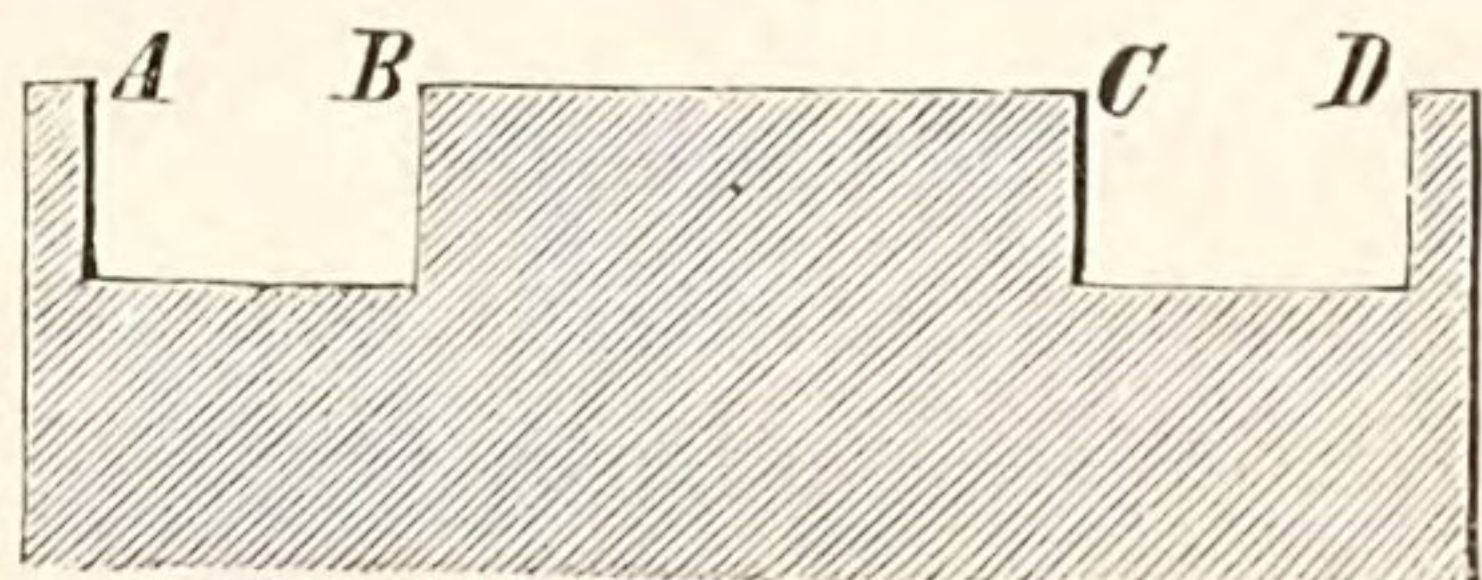
Die Umfänge der beiden Nuten stimmen hiernach fast völlig überein, ein kleiner Unterschied zeigt sich nur bei der zweiten Horizontalschicht, wo infolge zu starken Bremsens bei der Aufwicklung der Umfang in Nute 2 etwas geringer ausfiel.

Nimmt man die Mittel für die einzelnen Schichten beider Nuten und bezeichnet den Umfang der Grundfläche und diejenigen der Horizontalschichten durch $u_0, u_1 \dots u_6$, so erhält man

Umfang der Grundfläche	$u_0 = 1607,02,$
„ „ ersten Horizontalschicht	$u_1 = 1624,80,$
„ „ zweiten „	$u_2 = 1640,73,$
„ „ dritten „	$u_3 = 1657,33,$
„ „ vierten „	$u_4 = 1673,58,$
„ „ fünften „	$u_5 = 1689,53,$
„ „ sechsten „	$u_6 = 1705,86.$

Durch direkte Abmessung fand sich ferner (Fig. 11) für die Breite jeder Nute und des Mittelstückes

Fig. 11.



$$AB = CD = 43,25$$

$$BC = 69,05.$$

Da die Nute durch 15 nebeneinander liegende Drähte genau ausgefüllt wurde, so ergibt sich für den Durchmesser d

des umsponnenen Drahtes

$$d = \frac{43,25}{15} = 2,883.$$

Bezeichnet h den Abstand der Grundfläche der Nute von der äusseren Berührungsfläche der obersten Horizontalschicht und x die *mittlere Einsenkung*, welche durch das teilweise Einlegen der Windungen der oberen Schichten in die Rillen der unteren hervorgerufen wird, so ist

$$h = \frac{u_6 - u_0}{2\pi} = 15,731,$$

$$x = \frac{6d - h}{5} = 0,313,$$

und demnach erhält man für die Radien $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_6$ der Drahtaxen in den sechs Horizontalschichten

$$\varrho_1 = \frac{1}{2} \frac{u_0 + u_1}{2\pi} = 257,180,$$

$$\varrho_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1 + u_2}{2\pi} - x \right) = 259,705,$$

$$\varrho_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_2 + u_3}{2\pi} - x \right) = 262,295,$$

$$\varrho_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_3 + u_4}{2\pi} - x \right) = 264,909,$$

$$\varrho_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_4 + u_5}{2\pi} - x \right) = 267,471,$$

$$\varrho_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_5 + u_6}{2\pi} - x \right) = 270,040.$$

Da ferner $\Delta e = d = 2,883$ und $n = 14$ ist, folgt

$$e_1 = 34,525 + \frac{1}{2} \Delta e = 35,967,$$

$$e_{11} = 34,525 + 43,25 - \frac{1}{2} \Delta e = 76,334,$$

$$e_0 = 34,525 + \Delta e = 37,408,$$

$$e_0 + n \Delta e = e_{11} + \frac{1}{2} \Delta e = 77,775.$$

Berechnet man mit Hilfe dieser Werte die Konstante A , indem man die Werte von $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_6$ der Reihe nach unter den Summenzeichen einführt und sodann summiert, so findet sich für die doppelte Summe

$$0,595189,$$

für H_1

$$0,021249;$$

also wird

$$A = 0,616438.$$

Desgleichen ergibt sich für die doppelte Summe in B

$$0,00000638438,$$

für H_2

$$0,00000022687;$$

mithin wird

$$B = 0,0000247352.$$

Die Fläche $F = \Sigma \pi \varrho^2$ ist die Summe der Projektionen aller Windungsflächen auf eine zur Ringaxe des Induktors senkrechte Fläche. Dieselbe setzt sich zusammen aus der Summe der Projektionen der Windungsflächen von den Drähten, welche die verschiedenen Horizontalschichten bilden, und aus der Projektionsfläche, die von den Verbindungsdrähten der Schichten untereinander herrührt. Letztere bilden, wenn man sie parallel zu sich längs der Ringaxe übereinander geschoben denkt, zwei archimedische Spiralen von der Form Figur 9, wo $CO = \varrho_0$, $C1 = \varrho_1$, $C12 = \varrho_2$, $C23 = \varrho_3 \dots$ ist. Der den Radien ϱ_0 und ϱ_6 entsprechende Flächenraum ist aber*

$$\pi (\varrho_1^2 + \varrho_3^2 + \varrho_5^2) + \frac{\pi}{12} [(\varrho_2 - \varrho_0)^2 + (\varrho_4 - \varrho_2)^2 + (\varrho_6 - \varrho_4)^2]$$

* Die Gleichung der archimedischen Spirale, welche durch die Punkte $r = \varrho_0$, $r = \varrho_1$, $r = \varrho_2$ hindurchgeht, ist

$$r = \varrho_1 + \frac{\varrho_2 - \varrho_0}{2\pi} \varphi.$$

und folglich erhält man, da jede Horizontalschicht in jeder Nute aus 14 Umwindungen besteht,

$$F = 30\pi(\varrho_1^2 + \varrho_3^2 + \varrho_5^2) + 28\pi(\varrho_2^2 + \varrho_4^2 + \varrho_6^2) \\ + \frac{\pi}{6}[(\varrho_2 - \varrho_0)^2 + (\varrho_4 - \varrho_2)^2 + (\varrho_6 - \varrho_4)^2].$$

Hiernach findet sich, wenn man von dem letzten Glied, welches ohne allen Einfluss ist, absieht,

$$F = 37980900.$$

Die Gesamtlänge des Induktordrahtes besteht aus drei Teilen, nämlich erstens aus der Länge, welche den Horizontalschichten zukommt, zweitens der Länge der Drahtstücken, welche die Schichten untereinander verbinden, und drittens aus den Drahtstücken, welche die Rollen untereinander verbinden. Ist L die Gesamtlänge, l_1 , l_2 , l_3 die Länge der genannten drei Teile, so ist

$$L = l_1 + l_2 + l_3.$$

Die Länge eines Schraubenganges ist

$$\sqrt{4\pi^2 \varrho^2 + \Delta e^2},$$

demnach

$$l_1 = 28 \left\{ \sqrt{4\pi^2 \varrho_1^2 + \Delta e^2} + \sqrt{4\pi^2 \varrho_2^2 + \Delta e^2} + \sqrt{4\pi^2 \varrho_3^2 + \Delta e^2} \right. \\ \left. + \sqrt{4\pi^2 \varrho_4^2 + \Delta e^2} + \sqrt{4\pi^2 \varrho_5^2 + \Delta e^2} + \sqrt{4\pi^2 \varrho_6^2 + \Delta e^2} \right\},$$

oder, wenn man die Wurzeln in Reihen entwickelt,

$$l_1 = 56\pi(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5 + \varrho_6) + \frac{7\Delta e^2}{\pi} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} \right).$$

Das zweite Glied kann hierbei unberücksichtigt bleiben. Für den zweiten Teil ergibt sich ferner

Hieraus ergibt sich für den den Werten $r = \varrho_0$ und $r = \varrho_2$ entsprechenden Flächenraum

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} r^2 d\varphi = \pi \varrho_1^2 + \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_0}{2} \right)^2 \frac{\pi}{3}.$$

Für das Stück der Spirale zwischen $r = \varrho_2$ und $r = \varrho_4$, zwischen $r = \varrho_4$ und $r = \varrho_6$ hat man die Gleichungen

$$r = \varrho_3 + \frac{\varrho_4 - \varrho_2}{2\pi} \varphi,$$

$$r = \varrho_5 + \frac{\varrho_6 - \varrho_4}{2\pi} \varphi,$$

woraus sich der obige Wert ergibt.

$$l_2 = 4\pi (\varrho_1 + \varrho_3 + \varrho_5).*$$

Endlich der dritte Teil wird durch direkte Abmessung erhalten. Man findet auf diese Weise

$$l_1 = 278250,$$

$$l_2 = 9889,$$

$$l_3 = 236,$$

und demnach die ganze Länge des Induktordrahtes

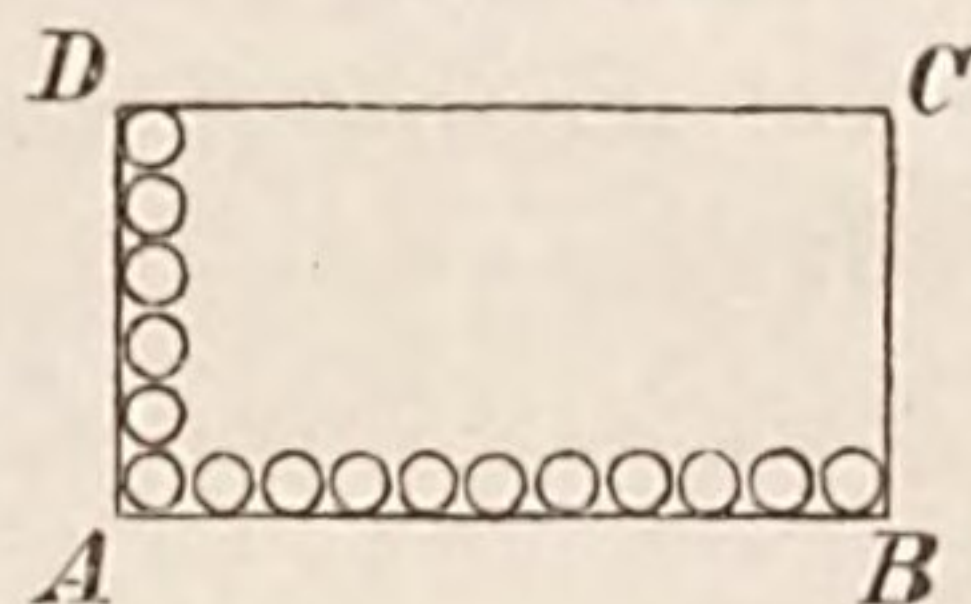
$$L = 288375.$$

Das Potential einer Rolle auf sich selbst.

Um das Potential einer Rolle auf sich selbst zu berechnen, sehen wir die Rolle als aus einer Reihe von Drahtingen bestehend an, welche horizontale und vertikale Schichten bilden.

Es sei (Fig. 12) $ABCD$ der Querschnitt der Rolle mit einer durch ihre Axe gelegten Ebene, a_0 der Radius der Drahtaxen der Ringe, welche die tiefste Horizontalschicht bilden, $a_0 + z$ und $a_0 + z'$ die Radien der Drahtaxen von zwei beliebigen Ringen, x und x' die Horizontalabstände der durch ihre Drahtaxen gelegten Vertikalebene von derjenigen des durch die Drahtaxe des ersten, in der Ecke A der Nute liegenden Ringes; endlich sei

Fig. 12.



$$AB = b, \quad AD = c,$$

alsdann hat man für das Potential eines Ringes auf einen anderen nach Maxwell,** wenn man dasselbe nach fallenden Potenzen des Radius $a_0 + z$ entwickelt

* Da die Verbindungsstücke zwei archimedische Spiralen bilden, so ergibt sich z. B. für die Länge s zwischen $r = \varrho_0$ und $r = \varrho_2$ aus der Gleichung

$$r = \varrho_1 + \frac{\varrho_2 - \varrho_0}{2\pi} \varphi = \varrho_1 (1 + \delta \varphi),$$

wo δ eine kleine Grösse besitzt,

$$s = \varrho_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\varphi + \delta^2\varphi^2},$$

woraus, wenn Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden,

$$s = 2\pi\varrho_1$$

folgt.

** A treatise on electricity and magnetism, Oxford 1873, Vol. II pag. 311.

$$M = 4\pi (a_0 + z) \left\{ \lg \frac{8(a_0 + z)}{\varrho} - 2 + \frac{(z' - z) \lg \frac{8(a_0 + z)}{\varrho} - (z' - z)}{2(a_0 + z)} \right. \\ \left. + \frac{[(z' - z)^2 + 3(x' - x)^2] \lg \frac{8(a_0 + z)}{\varrho} + 3(z' - z)^2 - (x' - x)^2}{16(a_0 + z)^2} - \dots \right\},$$

wobei zur Abkürzung

$$\varrho = \sqrt{(z' - z)^2 + (x' + x)^2}$$

gesetzt worden ist. Setzt man nun mit Maxwell das Potential einer Rolle auf sich selbst der Summe der Potentiale gleich, welche die Ringe, in welche man sich die Rolle zerlegt denkt, gegenseitig ausüben, und sieht man jede Horizontalschicht als einen sogenannten elektrodynamischen Cylinder an, so dass, wenn n' und ν die Anzahl der Umwindungen jeder horizontalen und vertikalen Schicht bedeuten, die auf die Längenelemente dx , dx' , dz , dz' kommende Anzahl Umwindungen

$$\frac{n'}{b} dx, \quad \frac{n'}{b} dx', \quad \frac{\nu}{c} dz, \quad \frac{\nu}{c} dz'$$

betragen, so ergibt sich für das Potential P der Rolle auf sich selbst

$$P = \frac{n'^2 \nu^2}{b^2 c^2} \int_0^c \int_0^b \int_0^c \int_0^b M dz dx dz' dx'.$$

Führt man die mühsame vierfache Integration aus, wobei man auf Unstetigkeiten der Funktion unter dem Integralzeichen Rücksicht zu nehmen hat, und beschränkt man sich in der Reihenentwicklung von M auf die beiden ersten Glieder, so erhält man für das erste Glied

$$4\pi n'^2 \nu^2 \left(a_0 + \frac{c}{2} \right) \left\{ \lg 8(a_0 + c) - \lg r - \frac{5}{12} + \frac{a_0^2}{2c \left(a_0 + \frac{c}{2} \right)} \lg \left(1 + \frac{c}{a_0} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \frac{b^2}{c^2} \lg \left(\frac{b}{r} \right) - \frac{1}{6} \frac{c^2}{b^2} \lg \left(\frac{c}{r} \right) - \frac{2}{3} \frac{b}{c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - \frac{2}{3} \frac{c}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} \right\},$$

wobei

$$r^2 = b^2 + c^2$$

ist.

Setzt man hierin, indem c gegen a_0 als klein vorausgesetzt wird,

$$\lg 8(a_0 + c) = \lg 8\left(a_0 + \frac{c}{2}\right) + \lg\left(1 + \frac{c}{2a_0 + c}\right) = \lg 8\left(a_0 + \frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2a_0 + c},$$

$$\lg\left(1 + \frac{c}{a_0}\right) = \frac{c}{a_0} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{a_0^2},$$

so ist

$$\lg 8(a_0 + c) + \frac{a_0^2}{2c\left(a_0 + \frac{c}{2}\right)} \lg\left(1 + \frac{c}{a_0}\right) = \lg 8\left(a_0 + \frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2},$$

und es findet sich für das erste Glied, wenn der *mittlere* Radius der Rolle $a_0 + \frac{c}{2} = a$ und die Gesamtanzahl der Umwindungen der Rolle $n'v = n$ gesetzt wird

$$4\pi n^2 a \left\{ \lg \frac{8a}{r} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{c^2} \lg \frac{b}{r} - \frac{1}{6} \frac{c^2}{b^2} \lg \frac{c}{r} - \frac{2}{3} \frac{b}{c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - \frac{2}{3} \frac{c}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} \right\}.$$

Ebenso erhält man durch Integration des zweiten mit $a_0 + z$ umgekehrt proportionalen Gliedes

$$4\pi n^2 \left(a_0 + \frac{c}{2}\right) \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{a_0(a_0 + c)}{4c\left(a_0 + \frac{c}{2}\right)} \lg\left(1 + \frac{c}{a_0}\right) \right\},$$

woraus sich ergibt, dass, wenn c gegen a_0 klein ist, dieses Glied Null ist.

Beachtet man, dass

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{c} = \frac{\pi}{2}, \quad r^2 = b^2 + c^2$$

ist, so ergibt sich für das Potential der Rolle auf sich selbst

$$P = n^2 F\left(\frac{b}{c}\right),$$

wo

$$F(x) = 4\pi a \left\{ \lg\left(\frac{8a}{c}\right) + \frac{1}{12} - \frac{\pi}{3} x - \frac{1}{2} \lg(1 + x^2) + \frac{1}{12} \frac{1}{x^2} \lg(1 + x^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{12} x^2 \lg\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x \right\}.$$

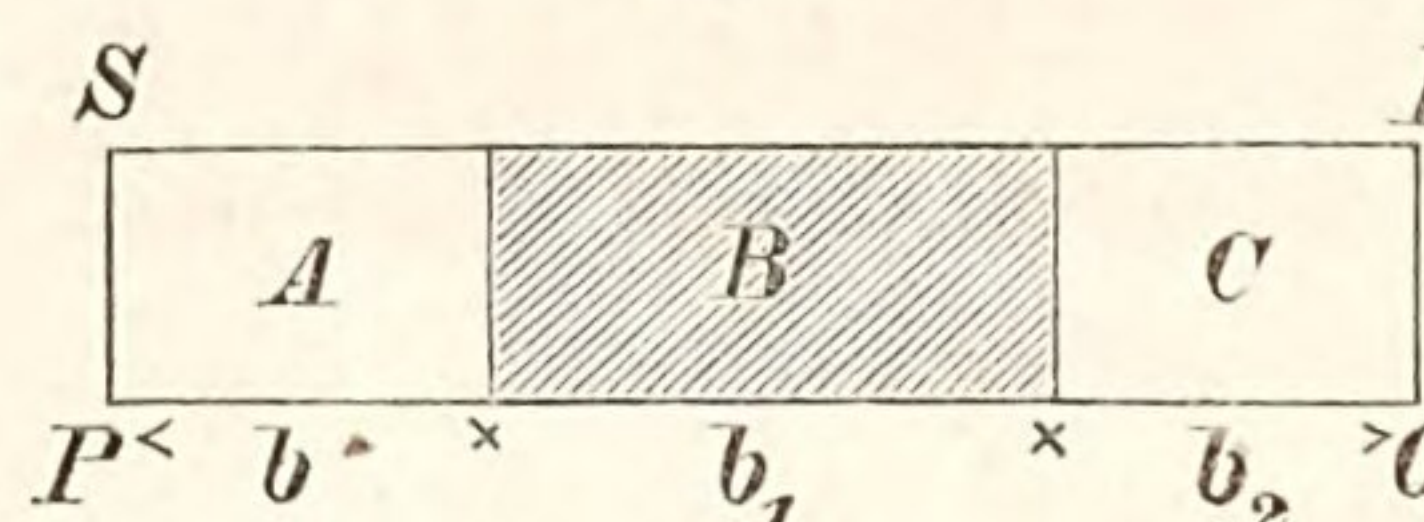
Dieser Ausdruck stimmt mit demjenigen überein, welchen Maxwell für das Potential einer Rolle auf sich selbst giebt (Philosophical Transactions Vol. 155, Part. I, S. 508), wenn daselbst, wie bereits Lord Rayleigh* bemerkt hat, für das Glied $-\frac{\pi}{3} \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{3} \operatorname{cosec} 2\theta$ geschrieben wird.

* Proceedings of the Royal Society Nr. 213, 1881, S. 117.

Das Potential des Induktors auf sich selbst.

Durch die Kenntnis des Potentials einer Rolle auf sich selbst ist diejenige des Potential des *Induktors* auf sich selbst noch nicht unmittelbar gegeben, da letzterer aus zwei durch einen Zwischenraum getrennten Rollen besteht. Offenbar ist das Potential des Induktors auf sich selbst die Summe der Potentiale jeder der Rollen auf sich selbst, vermehrt um das Doppelte des Potentials einer Rolle auf die andere. Maxwell* hat gezeigt, dass das Potential des Induktors auf sich selbst immer auf Potentiale von Rollen auf sich selbst zurückgeführt und dass demnach die Bestimmung des Potentials zweier Rollen aufeinander vermieden werden kann.

Fig. 13.



Es sei nämlich (Fig. 13) $PQRS$ der Querschnitt des Induktorringes durch eine durch die Axe desselben gelegte Ebene. Derselbe zerfällt in die drei Räume A, B, C , von denen A und C mit Drahtwindungen, B dagegen mit Holz ausgefüllt ist. Es soll vorausgesetzt werden, dass die Nuten A und C in gleicher Weise mit Draht von derselben Beschaffenheit erfüllt sind, dass die Anzahl der Windungen, welche eine Vertikalschicht bilden, in A und C gleich ist, dass dagegen eine Horizontalschicht in A und C eine verschiedene Anzahl von Windungen besitzt. Die A und C gemeinschaftliche Höhe der Vertikalschichten sei c , die Länge der Horizontalschicht in A sei b_1 , in C b_2 , und die Länge des Zwischenraumes B endlich werde durch b_3 bezeichnet.

Denkt man sich den Raum B bis zu gleicher Höhe wie A und C mit Drahtwindungen desselben Drahtes ausgefüllt, so lässt sich das Potential sämtlicher Windungen in A, B und C auf sich selbst leicht bestimmen. Bezeichnet man zur Abkürzung durch (A) , $(B) \dots (A + B)$ etc. die Potentiale auf sich selbst der Rolle A , der Rolle B , der Rolle, welche A und B zusammengekommen bilden, ferner durch (A, B) , (B, C) etc. das Potential der Rolle A auf die Rolle B , der Rolle B auf die Rolle C u. s. f., so ist das Potential sämtlicher Windungen in A, B und C auf sich selbst

$$(A + B + C) = (A) + (B) + (C) + 2(A, C) + 2(B, C) + 2(A, B)$$

und folglich ist

* a. a. O. S. 509.

$$2(A, C) = (A + B + C) - (A) - (B) - (C) - 2(A, B) - 2(B, C).$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned}(A + B) &= (A) + (B) + 2(A, B), \\ (B + C) &= (B) + (C) + 2(B, C).\end{aligned}$$

Entnimmt man hieraus die Werte von $2(A, B)$ und $2(B, C)$ und setzt sie in den Ausdruck für $2(A, C)$ ein, so folgt

$$2(A, C) = (A + B + C) - (A + B) - (B + C) + (B);$$

demnach erhält man, da das Potential p des Induktors auf sich selbst

$$p = (A) + (C) + 2(A, C)$$

ist,

$$p = (A) + (B) + (C) + (A + B + C) - (A + B) - (B + C),$$

wodurch das Potential des Induktors auf sich selbst auf Potentiale von Rollen auf sich selbst zurückgeführt ist.

Es seien nun die in den drei Räumen A , B und C enthaltenen Umwindungen n , n_1 , n_2 , die Umwindungen einer Horizontalschicht n' , n'_1 , n'_2 , die Umwindungen einer Vertikalschicht ν , so ist

$$n = \nu n', \quad n_1 = \nu n'_1, \quad n_2 = \nu n'_2;$$

es ist ferner

$$n'_1 = \frac{n'}{b} b_1 = \frac{n'_2}{b_2} b_1,$$

also

$$n'^2_1 = \frac{n' n'_2}{b b_2} b_1^2.$$

Man kann daher auch schreiben

$$n = \sqrt{\frac{n \cdot n_2}{b b_2}} \cdot b, \quad n_1 = \sqrt{\frac{n \cdot n_2}{b b_2}} \cdot b_1, \quad n_2 = \sqrt{\frac{n \cdot n_2}{b b_2}} \cdot b_2;$$

folglich ergibt sich, wenn die Bezeichnung von S. 49 beibehalten wird,

$$\begin{aligned}p &= n^2 F\left(\frac{b}{c}\right) + n n_2 \frac{b_1^2}{b b_2} F\left(\frac{b_1}{c}\right) + n_2^2 F\left(\frac{b_2}{c}\right) + n n_2 \frac{(b + b_1 + b_2)^2}{b b_2} F\left(\frac{b + b_1 + b_2}{c}\right) \\ &\quad - n n_2 \frac{(b + b_1)^2}{b b_2} F\left(\frac{b + b_1}{c}\right) - n \cdot n_2 \frac{(b_1 + b_2)^2}{b b_2} F\left(\frac{b + b_2}{c}\right).\end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, wo die Räume A und C ausser gleicher Höhe auch noch gleiche Breite besitzen, findet man hieraus, da alsdann

$$n = n_2, \quad b = b_2$$

ist,

$$\begin{aligned}p &= \frac{n^2}{b^2} \left\{ 2b^2 F\left(\frac{b}{c}\right) + b_1^2 F\left(\frac{b_1}{c}\right) + (2b + b_1)^2 F\left(\frac{2b + b_1}{c}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2(b + b_1)^2 F\left(\frac{b + b_1}{c}\right) \right\}.\end{aligned}$$

Hierin ist

- n die Anzahl der Umwindungen einer der Rollen,
- b die Breite jeder Nute,
- c die Höhe jeder Nute,
- b_1 die Breite des Zwischenraumes zwischen den Nuten,
- a der mittlere Radius der Rollen.

Die in dem Ausdruck $F(x)$ S. 49 gebrauchten Logarithmen sind natürliche Logarithmen.

Bei der Entwicklung des Potentials einer Rolle auf sich selbst wurden oben nur die beiden ersten Glieder der Reihe für M in Rücksicht gezogen. Berücksichtigt man noch das dritte Glied, so hat man nach Maxwell dem oben gefundenen Ausdruck für das Potential einer Rolle auf sich selbst noch das Glied

$$n^2 f\left(\frac{b}{c}\right)$$

hinzuzufügen, wo

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\pi c^2}{24a} \left\{ \left[\lg\left(\frac{8a}{c}\right) - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) \right] (1+3x^2) + 3,45(1+x^2) \right. \\ \left. + 27,475 - 1,6\pi x^3 + 3,2x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{10} \frac{1}{x^2} \lg(1+x^2) \right. \\ \left. - \frac{13}{6} x^4 \lg\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich für das dem Potentiale des Induktors auf sich selbst zuzufügende Korrektionsglied

$$\begin{aligned} + \frac{n^2}{b^2} \left\{ 2b^2 f\left(\frac{b}{c}\right) + b_1^2 f\left(\frac{b_1}{c}\right) + (2b+b_1)^2 f\left(\frac{2b+b_1}{c}\right) \right. \\ \left. - 2(b+b_1)^2 f\left(\frac{b+b_1}{c}\right) \right\}; \end{aligned}$$

für den Induktor fand sich nun

$$\begin{aligned} a &= 263,61, \\ b &= 43,25, \\ b_1 &= 69,05, \\ c &= 15,73, \\ n &= 87,00. \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich p , wenn man das Korrektionsglied* gesondert angiebt,

$$p = 0,028435 \cdot 10^{10} + 0,000316 \cdot 10^{10}$$

oder

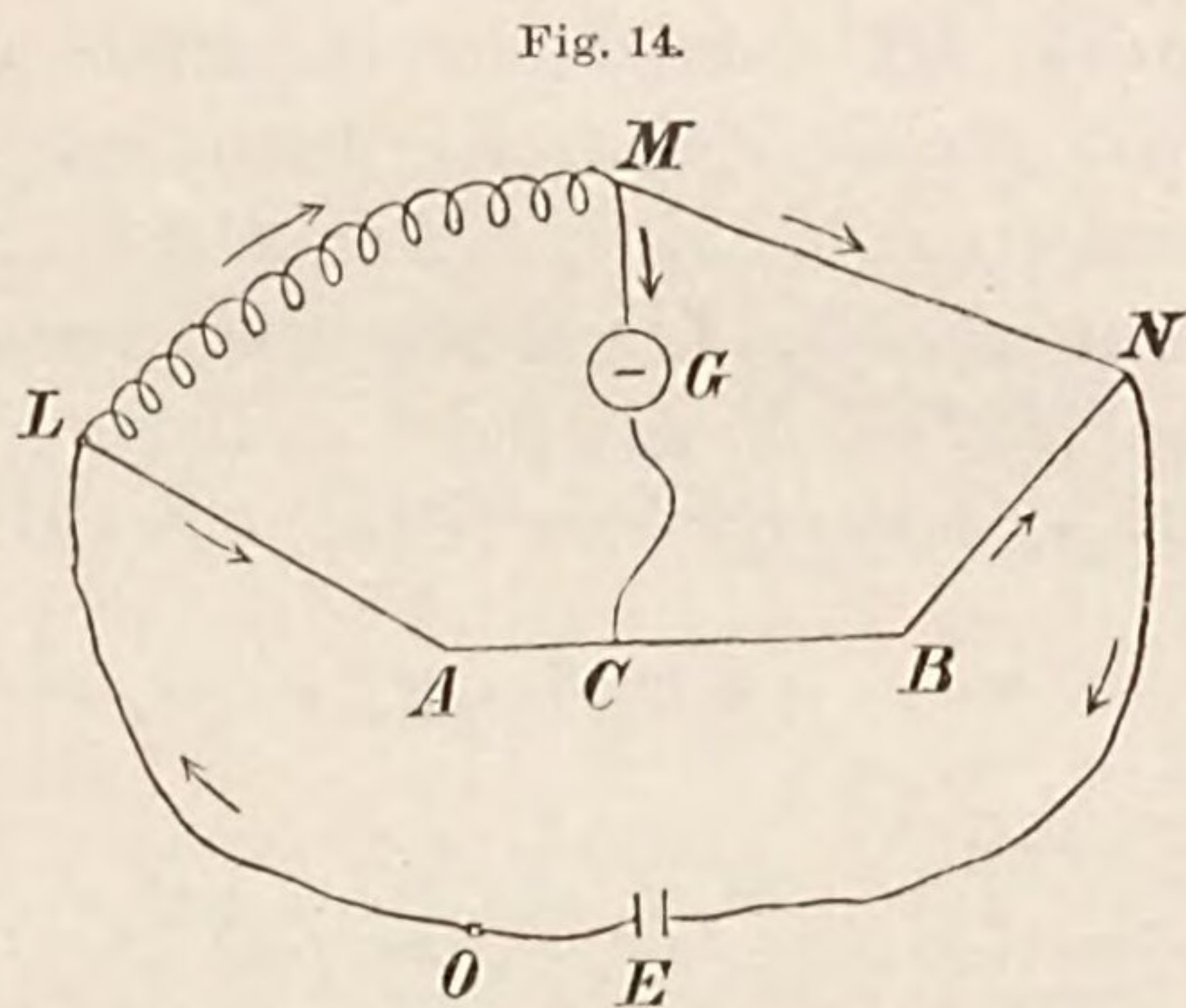
* Lord Rayleigh bezweifelt die Richtigkeit des Korrektionsgliedes: Proceedings of the Royal Society Nr. 213, 1881, S. 118.

$$p = 0,028751 \cdot 10^{10} \text{ Millimeter.}$$

Mit Hilfe dieses Wertes lässt sich nun leicht das von der Induktion des Induktors auf sich selbst abhängige Korrektionsglied $\frac{p\gamma}{w}$ berechnen, wobei es genügen würde, für w einen angenäherten Wert zu setzen, den man erhält, wenn man zunächst den Widerstand ohne Rücksicht auf die Selbstinduktion bestimmte.

Bestimmung des Korrektionsgliedes $\frac{p\gamma}{w}$ auf experimentellem Wege.

Um das Potential einer Rolle auf sich selbst zu bestimmen, bildet man nach Maxwell* eine Wheatstonesche Brücke. Es seien (Figur 14) die Zweige derselben LM , MN , NBC , CAL und $LOEN$. In dem letzten Zweige befindet sich die elektromotorische Kraft E und in dem Zweige MC das Galvanometer G eingeschaltet. Der Zweig LM werde durch die Rolle, deren Potential auf sich selbst gesucht wird, gebildet. Die Zweige MN , NBC , CAL sollen aus Drähten gebildet sein, welche bei veränderlicher Stromintensität keine Selbstinduktion hervorbringen, was sich dadurch leicht erreichen lässt, dass man von der Mitte jeden Drahtes ausgehend die beiden Faden parallel neben einander ausspannt oder sie seilartig um einander herumschlingt. Die etwaige gegenseitige Induktion zwischen den Zweigen kann bei geeigneter Anordnung stets vernachlässigt werden, so dass bei veränderlicher Stromintensität nur die Selbstinduktion in dem Zweige LM und im Galvanometer G in Rücksicht zu ziehen ist. Der Zweig MC , welcher das Galvanometer enthält, lasse sich mit seinem Kontaktpunkt C längs eines geradlinig ausgespannten Drahtstückes AB verschieben.



Sind die Widerstände der Drähte MN , NB , AL sehr nahe unter sich und dem Widerstande von LM gleich, was vorausgesetzt

* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 155, Part. I, S. 475.

werden soll, so kann man dem Kontaktpunkt C eine solche Lage geben, dass bei *dauerndem* Schlusse des Stromes in O das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt. Alsdann ist, wenn die Widerstände der Zweige LM , MN , NBC , CAL , $LOEN$ mit w_1 , w_2 , w_3 , w_4 , W bezeichnet werden,

$$w_1 w_3 = w_2 w_4.$$

Da in dem Zweige MGC kein Strom fliesst, so findet bei L eine einfache Stromteilung statt in die beiden Teile LMN und $LACBN$. Für die Intensität J_1 in dem Teile LMN ergibt sich daher

$$J_1 = \frac{(w_3 + w_4) E}{W(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + (w_1 + w_2)(w_3 + w_4)}.$$

Findet in dem Stromzweig $LOEN$ kein konstanter, sondern ein mit der Zeit veränderlicher Strom statt, so ist der Strom in dem Zweige MC infolge der Induktion des Zweiges LM auf sich selbst nicht gleich Null. Es seien zur Zeit t die Intensitäten in den Zweigen LM , MN , NBC , CAL und MCG i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_0 ; so ist, wenn man die Kirchhoffschen Gesetze auf die Stromkreise $LMCAL$ und $MNBCM$ anwendet und das Potential von LM auf sich selbst mit p , dasjenige von MGC auf sich selbst mit p_0 bezeichnet,

$$i_1 w_1 + i_0 w_0 - i_4 w_4 = -p \frac{di_1}{dt} - p_0 \frac{di_0}{dt},$$

$$i_2 w_2 - i_3 w_3 - i_0 w_0 = +p_0 \frac{di_0}{dt},$$

$$i_1 = i_2 + i_0,$$

$$i_3 = i_4 + i_0,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Gleichung $w_1 w_3 = w_2 w_4$

$$i_0 [w_0 (w_3 + w_4) + w_4 (w_2 + w_3)] = -w_3 p \frac{di_1}{dt} - (w_3 + w_4) p_0 \frac{di_0}{dt}$$

ergiebt.

Die Änderung der Stromintensität in dem Stromzweige $LOEN$ werde zunächst dadurch hervorgebracht, dass zur Zeit $t=0$ der Strom geschlossen wird. Erfahrungsmässig stellt sich dann nach Verlauf einer gewissen Zeit τ in dem Leitersystem ein stationärer Strom ein, und daher muss

$$\text{für } t=0, \quad i_0=0, \quad i_1=0,$$

$$\text{für } t=\tau, \quad i_0=0, \quad i_1=J_1$$

sein. Multipliziert man die obige Gleichung mit dt und integriert zwischen den Grenzen 0 und τ , so erhält man hiernach

$$\int_0^{\tau} i_3 dt = - \frac{w_3 J_1}{w_0 (w_3 + w_4) + w_4 (w_2 + w_3)} \cdot p,$$

oder, indem man für J_1 seinen Wert einsetzt und berücksichtigt, dass $w_1 w_3 = w_2 w_4$ ist,

$$\int_0^{\tau} i_0 dt = - \frac{w_3}{N} p \cdot E,$$

wo

$$N = W w_0 (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + W (w_2 + w_3) (w_1 + w_3) \\ + w_0 (w_1 + w_2) (w_3 + w_4) + w_1 w_2 (w_3 + w_4) + w_3 w_4 (w_1 + w_2)$$

ist. Die Induktion des Galvanometerdrahtes bleibt ohne Einfluss, weil die Induktion beim Ansteigen des Stromes in ihm durch diejenige beim Abfallen jedesmal aufgehoben wird.

Wird zweitens die Änderung der Stromintensität in dem Zweige *LOEN* dadurch hervorgerufen, dass der ursprünglich konstante Strom zur Zeit $t = 0$ unterbrochen wird, so ist nach Verlauf einer gewissen Zeit τ die Intensität in dem Leitersystem gleich Null, und man hat die Bedingungen

$$\text{für } t = 0, \quad i_0 = 0, \quad i_1 = J_1,$$

$$\text{für } t = \tau, \quad i_0 = 0, \quad i_1 = 0.$$

Man erhält in diesem Falle

$$\int_0^{\tau} i_0 dt = + \frac{w_3}{N} p E.$$

Da nun die Erfahrung zeigt, dass die Zeit τ , während welcher der Strom in dem Leitersystem aus dem einen Grenzwert zu dem anderen übergeht, äusserst kurz ist, so wird beim Lösen oder Schliessen der Kette auf die Galvanometernadel ein Stoss von gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung ausgeübt, aus dessen Wir-

kung der Wert des Integrals $\int_0^{\tau} i_0 dt$ nach der Multiplikations- oder

Rückwerfungsmethode gefunden wird. Wird nämlich der Strom geschlossen oder geöffnet, wenn sich die Nadel in der Ruhelage befindet, und ist $f(0)$ das Drehungsmoment, welches der Strom 1 auf die Nadel in der Ruhelage ausübt, T die horizontale Komponente des Erdmagnetismus, M das magnetische Moment der Nadel, τ_0 die Schwingungsdauer bei offener Kette, θ der Torsionskoeffizient, λ und λ_0 das logarithmische Dekrement bei geschlossener und offener Kette, end-

lich r der Abstand der Skala vom Spiegel und s_1 und s_2 die Differenz der beiden grossen und kleinen Ausschläge der Nadel in Skalenteilen, welche bei der Rückwerfungsmethode beobachtet werden, so hat man

$$\int_0^{\tau} i_0 dt = \frac{1}{2} \frac{TM}{f(0)} (1 + \theta) \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}}},$$

wo

$$\lambda = \lg \text{ nat. } \frac{a}{b},$$

$$a = \frac{s_1}{2r} - \frac{11}{32} \left(\frac{s_1}{2r} \right)^3,$$

$$b = \frac{s_2}{2r} - \frac{11}{32} \left(\frac{s_2}{2r} \right)^3.$$

Handelt es sich nun um die Bestimmung von $\frac{p\gamma}{w}$ und nicht um diejenige des Potentials p , so schaltet man, wie Lord Rayleigh* angegeben hat, in den Zweig LM einen kleinen Widerstand Δw_1 ein und schliesst sodann *dauernd* die Kette, indem man zuerst den Schluss in O , sodann denjenigen in dem Zweige MC bei M oder C bewirkt. Die Nadel zeigt alsdann nach einiger Zeit eine konstante Ablenkung, welche der Intensität

$$i'_0 = \frac{(w_1 + \Delta w_1) w_3 - w_2 w_4}{N'} E = \frac{\Delta w_1 w_3}{N'} E$$

entspricht, wobei N' den Wert von N bezeichnet, wenn in demselben für w_1 $w_1 + \Delta w_1$ gesetzt wird. Entwickelt man $\frac{1}{N'}$ nach Potenzen von Δw_1 , so kann man, bei hinreichender Kleinheit von Δw_1 gegen w_1 , alle Glieder, welche Δw_1 in der ersten oder einer höheren Potenz enthalten, vernachlässigen, folglich wird

$$i'_0 = \frac{\Delta w_1 w_3}{N} \cdot E$$

und demnach

$$\frac{\int_0^{\tau} i_0 dt}{i'_0} = \frac{p}{\Delta w_1}.$$

Der Wert von i'_0 lässt sich nun aus der Beobachtung des Ablenkungswinkel φ der Nadel leicht bestimmen. Es ist nämlich

* a. a. O. S. 116

$$i'_0 = \frac{TM}{f_{(0)}} (1 + \theta) \operatorname{tg} \varphi.$$

Diese Formel gilt jedoch nur für sehr kleine Ablenkungswinkel, bei welchen die Intensität der Tangente proportional gesetzt werden darf. Bei grösseren Ablenkungswinkeln tritt noch ein Korrektionsglied hinzu, welches von der Form des Multiplikators abhängig ist. Für das von dem Verfasser benutzte Galvanometer ist

$$i'_0 = \frac{TM}{f_{(0)}} (1 + \theta) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - \delta \sin \varphi^2},$$

wo $\delta = 0,63$ ist. Setzt man für $\int_0^\pi i_0 dt$ und i'_0 ihre Werte und nimmt an, dass an Stelle von LM der Induktor in der Brücke eingeschaltet ist, so erhält man schliesslich

$$\frac{p}{w} = \frac{1}{2} \frac{\Delta w_1}{w} \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\pi}} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \frac{1 - \delta \sin \varphi^2}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Zur Einschaltung wurde ein Stück von demselben Drahte benutzt, aus welchem der Induktor bestand, dessen Länge 3835 Millimeter betrug, woraus sich

$$\frac{\Delta w_1}{w} = \frac{3835}{288375}$$

ergiebt. Fünf bei verschiedenen Temperaturen des Drahtes angestellte Beobachtungsreihen ergaben, nachdem sie nach der Formel

$$w_t = w_9 [1 + 0,00371 (t - 9)]$$

auf die Temperatur von 9° C. reduziert waren, für $\frac{p}{w}$ die Werte

$$\begin{aligned} 0,022777, \\ 0,022769, \\ 0,022871, \\ 0,022931, \\ 0,023110; \end{aligned}$$

also im Mittel

$$\frac{p}{w} = 0,0229,$$

und hieraus, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit $\gamma = 2\pi$ gesetzt wird,

$$\frac{p\gamma}{w} = 0,1439.$$

Der Schluss und die Öffnung des Stromes wurde hierbei durch Eintauchen, resp. Herausziehen eines amalgamierten Drahtstiftes aus

einem Quecksilbernäpfchen bewerkstelligt, und den konstanten Strom von nur *geringer* Intensität erhielt man durch Anwendung eines schon längere Zeit im Gebrauche befindlichen Meidingerschen Ballon-elementes.

Berücksichtigung der Temperaturänderungen und der Polarisation.

Bei der angewendeten Methode zur Bestimmung des Korrektions-gliedes $\frac{p\gamma}{w}$ blieben zwei Fehlerquellen unberücksichtigt: 1) die Temperaturerhöhung, welche der Strom in dem Leitersystem hervorbringt, und 2) die Polarisation, welche beim Einschalten des Elementes entsteht. Beide können aber unter ungünstigen Verhältnissen das Resultat beträchtlich abändern. In der That zeigte sich die Einwirkung der Temperaturänderungen bei den beschriebenen Versuchen dadurch, dass der Kontaktpunkt *C* von Zeit zu Zeit verschoben werden musste, damit die Intensität des Stromes in der Brücke *MC* bei dauerndem Stromschluss in *O* auf Null erhalten blieb. Da die Induktorwindungen nicht wie bei einem einfach ausgespannten Draht durch ein Bad auf konstanter Temperatur erhalten werden können, so ergibt sich, um den Einfluss der Temperaturänderungen auf ein Minimum herab zu drücken, als einziges Mittel die Anwendung von Strömen *von kurzer Dauer*.

Bei Anwendung letzterer gewinnt aber die Polarisation einen erheblichen Einfluss. Während bei langem Schlusse des Stromes ein Einfluss der Polarisation nur insofern eintritt, als die Nadel infolge der längeren Dauer des Polarisationsstromes gegenüber dem Induktionsstrome streng genommen keinen Stoss mehr erhält, wird bei kurzem Schlusse die Wirkung von der Dauer des Stromschlusses (dieselbe wenigstens solange vorausgesetzt, als der Induktionsstrom dauert) abhängig. Der sehr bedeutende Einfluss, der unter Umständen denjenigen der Temperaturänderungen weit übertraf, liess sich auf das deutlichste nachweisen, nachdem man an der Stelle *O* ein Gefäss mit angesäuertem Wasser, in welches zwei Platinplatten eintauchten, in die Kette eingeschaltet hatte. Um hiernach Ströme von kurzer Dauer anwenden zu können, musste ein Arrangement getroffen werden, bei welchem die Polarisation unschädlich gemacht wurde.

Taf. I Figur 4 stellt dieses Arrangement dar. *LM* bedeuten, wie in Figur 14 die Induktorwindungen, *MN*, *NBC*, *CA2L* die

induktionslosen, LM an Widerstand sehr nahe gleichen Zweige der Wheatstoneschen Wage, G das Galvanometer. Mit L und M sind zwei Stöpselkommutatoren I und II aus Kupfer verbunden, deren isolierte Teile durch 1, 2, 3, 4 bezeichnet sind. Zwischen den Platten 3 und 4 des Kommutators I ist der kleine Widerstand Δw_1 eingeschaltet. Der Kontaktpunkt C und die Platte 4 des Kommutators II steht mit einem Unterbrecher von folgender Einrichtung in Verbindung. Auf einem Fussbrett (Taf. I Fig. 3) sind drei mit Quecksilber gefüllte, oben offene Glasgefässe a , b , c angebracht, durch deren Boden Drähte geführt sind, welche in amalgamierte Kupferplatten endigen. Zwischen b und c erhebt sich senkrecht zum Fussbrett die Metallstange de mit den Doppelarmen f und g . Die an ihren Enden befindlichen Öffnungen dienen den Stangen hi und kl zur Führung. Diese Stangen sind aus Holz, tragen aber an ihren Enden dicke, amalgamierte Kupferstifte. Die Feder r drückt die Stange hi so fest gegen ihre Führung, dass dieselbe ganz unabhängig von ihrem Gewicht in jeder Stellung verharrt. Sie ist ausserdem an ihrem oberen Ende h mit einem Faden verknüpft, welcher, über die Rolle R führend, jenseit die Kupferstange mn trägt. Dieselbe ist gleichfalls an ihrem Ende amalgamiert und an der Stelle o mit einem Draht verlötet. Längs der Stange de lässt sich das Querstück pq verschieben. Zu diesem Zwecke ist dasselbe in der Mitte und den beiden Enden durchbohrt. hi geht durch sein Bohrloch ohne merkliche Reibung frei hindurch, während kl im Bohrloche befestigt ist. Durch die Stange hi sind ferner die Querstifte s und t hindurchgeführt, welche bei Hebung oder Senkung des Querstückes pq ein Mitnehmen der Stange veranlassen. Das Element E ist mit dem Verzweigungspunkt F , das Quecksilbergefass c mit dem verschiebbaren Kontakt C und die Gefässe a und b mit dem Verzweigungspunkt D verbunden. Dabei ist zwischen a und D ein Widerstand W von solcher Grösse eingeschaltet, dass der Widerstand der Zweige $EFaWDE$ und $EFL < \frac{M}{ACB} > NbDE$ einander gleich waren.

Wird nun in den Kommutator I der Stöpsel (1, 2), in den Kommutator II der Stöpsel (1, 2) und (3, 4) eingesetzt und das Querstück pq nach unten verschoben, so bewegt sich gleichzeitig der mit ihm fest verbundene Stab kl nach unten. Der an seinem Ende befindliche Kupferstift kommt in dem Augenblick zum Eintauchen in das Quecksilber, wo sich pq in der Mitte seines Hubes befindet. Wie man aus Figur 1 ersieht, ist alsdann die Brücke mit

dem Galvanometer eingeschaltet. Bei weiterem Niedergange stösst das Ende p des Querstückes gegen den Stift t , der Stab hi wird mitgenommen und der an seinem Ende befestigte Kupferstift zum Eintauchen in das Quecksilbergefäss b gebracht. Die Senkung der Stange hi hat aber mittelst Faden und Rolle eine Hebung des Kupferstiftes mn zur Folge, und da die Länge des Fadens eine solche war, dass unmittelbar vor Herstellung des Kontaktes zwischen dem Kupferstift i und dem Quecksilber in b der Kontakt zwischen dem Stifte mn und dem Quecksilber in a aufgehoben wurde, so folgt, dass der vorher geschlossene Stromkreis $EFaWDE$ gelöst und unmittelbar darauf der Stromkreis $EFL < \overset{M}{ACB} > NbDE$ geschlossen wird. Es erfolgt hierbei die Induktion in LM , welche, da die Brücke mit dem Galvanometer eingeschaltet ist, auf die Nadel einen Stoss ausübt. Die Polarisation aber bleibt hierbei ohne Einfluss, da das Element bis auf eine äusserst kleine Zeit immer geschlossen erhalten wird.

Bei rückgängiger Bewegung des Querstückes pq bleibt zunächst der Kontakt zwischen i und b unverändert, während die Stange kl sich hebt. In der Mitte des Hubes angelangt, wird der Kontakt zwischen c und l aufgehoben und damit das Galvanometer ausgeschaltet. Einige Zeit darauf stösst das Ende p des Querstückes gegen den Stift s , die Stange hi wird mitgenommen und der Kontakt ib aufgehoben, während sich der Kontakt zwischen n und a von selbst herstellt. Der bei Lösung des Kontaktes ib in LM entstehende Induktionsstrom hat auf die Nadel des Galvanometers keinen Einfluss, da letzteres mit der Brücke ausgeschaltet ist.

Bei jedesmaligem Nieder- und nachherigem Aufgange des Querstückes pq wird hiernach auf die Nadel ein einziger Stoss ausgeübt, welcher von der Induktion durch Stromschluss herrührt. Die Stifte s und t besitzen einen solchen Abstand von einander, dass angenommen werden darf, der im Moment des Kontaktes zwischen i und b beginnende Induktionsstrom habe bei nicht allzu rascher Nieder- und Aufbewegung von pq bereits sein Ende erreicht, wenn der Kontakt zwischen c und l wieder aufgehoben wird.

Mittelst der besprochenen Einrichtung ist man im Stande, der Nadel, während LM von einem Strom von *kurzer Dauer* durchflossen wird, Stösse in *demselben Sinne* zu erteilen. Man kann daher die Multiplikationsmethode in der Art in Anwendung bringen, dass man die Nadel jedesmal nach einem Stosse *einmal* die Ruhelage ohne Stoss passieren lässt. Bei diesen Versuchen wurde ein Dämpfer aus galvanoplastischem Kupfer angewendet. Ist Φ der Grenzwert

des Winkels zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrungspunkten, τ_0 und λ_0 die Schwingungsdauer und das logarithmische Dekrement bei offenem Galvanometer und bei Entfernung des Dämpfers, λ das logarithmische Dekrement bei offenem Galvanometer unter Einwirkung des Dämpfers, κ das Trägheitsmoment der Nadel mit ihrer Aufhängung, endlich c die der Nadel durch den Stoss mitgeteilte Geschwindigkeit, so ist

$$\Phi = \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} \frac{c}{1 - e^{-\lambda}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}$$

und folglich

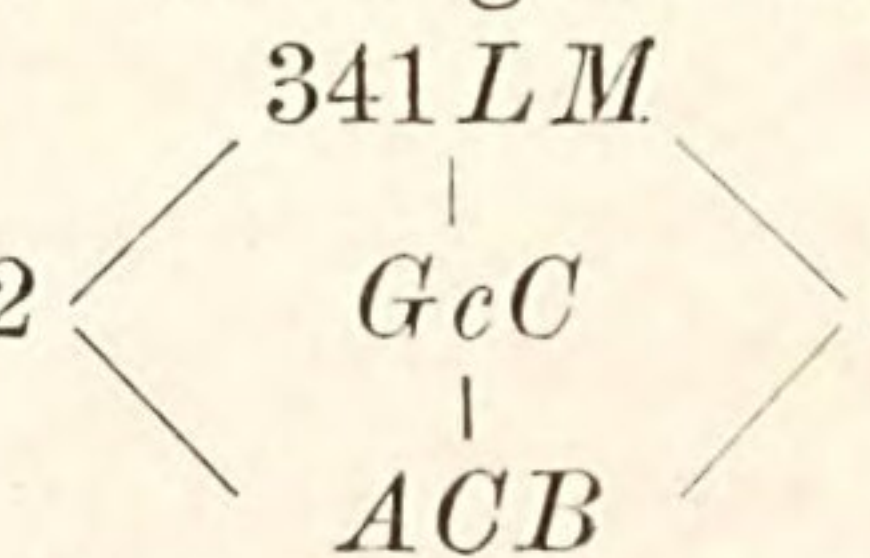
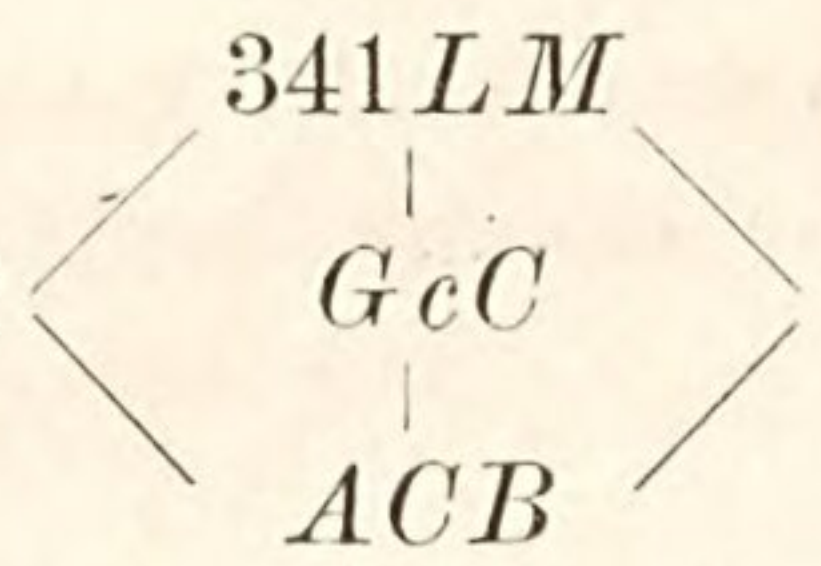
$$\int i_0 dt = \frac{\kappa}{f_{(0)}} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{\tau_0} (1 - e^{-\lambda}) e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \cdot \Phi.$$

Um von diesen Versuchen diejenige Lage des Kontaktpunktes C feststellen, respektive dieselbe nach den Beobachtungen kontrollieren zu können, bei welcher die Produkte der in der Wheatstoneschen Wage gegenüberliegenden Widerstände einander gleich sind, wurde das Querstück pq bis zu einer kleinen Durchbohrung u längs ih emporgeschoben und daselbst durch Einstecken eines Stiftes mit ih in feste Verbindung gebracht. Bei dem Auf- und Niedergange von pq bewegen sich alsdann beide Stäbe hi und kl mit. Die Lage der Durchbohrung u war dabei so gewählt, dass beim Niedergange der Kupferstift am Ende von hi beträchtlich früher zum Eintauchen in das Quecksilber gelangte, als derjenige des Stabes kl . Es wurde hiernach beim Niedergange der Strom *zuerst* geschlossen und erst später das Galvanometer eingeschaltet. Beim Aufgange dagegen wurde das Galvanometer *zuerst* ausgeschaltet und erst später der Strom unterbrochen. Beim Nieder- und Aufgange blieb alsdann die beim Schlusse und bei der Öffnung in LM erzeugte Induktion ohne jeden Einfluss auf die Galvanometernadel.

Die eben besprochene Abänderung des Unterbrechers blieb bei der folgenden Versuchsreihe dieselbe. Nachdem der Dämpfer entfernt worden und mittelst des Kommutators II durch Einstecken des Stöpsels (2, 3) die Galvanometernadel völlig zur Ruhe gebracht war, wurde diese Verbindung gelöst und die Verbindung (1, 2) und (3, 4) hergestellt, während zugleich im Kommutator I der Stöpsel (1, 4) und (2, 3) eingesetzt und dadurch der Widerstand Δw_1 eingeschaltet wurde. Man schob nun das Querstück pq nach unten. Durch den hierdurch bewirkten Stromschluss wurde auf die Nadel kein Induktionsstoss ausgeübt, wohl aber fand eine Ablenkung der Nadel infolge des Umstandes statt, dass durch Einschaltung des Widerstandes Δw_1 das Produkt der

Widerstände der gegenüberliegenden Seiten der Wheatstoneschen Wage ungleich war. Man löste nun den Strom erst, nachdem die Nadel ihren ersten Umkehrungspunkt erreicht hatte, was nach 4 Sekunden der Fall war, und beobachtete den Ausschlag α , welchen dieselbe von der Ruhe ab unter Einwirkung des Stromes erhielt. Derselbe Versuch wurde wiederholt, nachdem im Kommutator II die Stöpsel die Stellungen (1, 3) und (2, 4) erhalten hatten.

Behält man die früheren Bezeichnungen bei und bezeichnet ausserdem mit λ' das logarithmische Dekrement bei Schluss des

Stromkreises $EF2$  $Nb DE$, wofür man auch den Stromkreis 2  N setzen darf, da der Widerstand des Elementes sehr gross ist, so wird

$$\alpha = \frac{\tau_0^2}{\pi^2 + \lambda_0^2} \frac{i'_0 f_{(0)}}{\kappa} (1 + e^{-\lambda'}),$$

woraus sich

$$i'_0 = \frac{\kappa}{f_{(0)}} \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\tau_0^2} \frac{\alpha}{1 + e^{-\lambda'}}$$

ergiebt. Aus

$$\frac{\int i_0 dt}{i'_0} = \frac{p}{\Delta w_1}$$

erhält man schliesslich

$$\frac{p}{w} = \frac{\Delta w_1}{w} \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} (1 - e^{-\lambda}) (1 + e^{-\lambda'}) e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \frac{\Phi}{\alpha}.$$

Aus solchen Versuchen fand sich bei einer Temperatur von $18,5^\circ \text{C}$. des Induktordrahtes

$$\frac{p}{w} = 0,0210.$$

Gewisse, wenn auch nur kleine Verschiedenheiten bei dem ersten Teile dieser Versuche, welche sich bei rascherem oder langsamerem Nieder- und Aufgange des Querstückes pq zeigten, liess es als zweifelhaft erscheinen, ob immer bei der aufwärts gehenden Bewegung und der damit verbundenen Ausschaltung des Galvanometers der beim Niedergange erzeugte Induktionsstrom gänzlich verlaufen war. Aus diesem Grunde wurde eine dritte Versuchsreihe in folgender Weise zur Ausführung gebracht.

Nachdem durch den Kommutator II die Galvanometernadel völlig in Ruhe versetzt, sodann die Verbindung (1, 2) und (3, 4) hergestellt und endlich im Kommutator I der Stöpsel (1, 2) eingesetzt war, wurde das Querstück pq und die mit ihm verbundenen Stangen hi und kl so nach unten geschoben, dass der Kontakt ib vor demjenigen lc eintrat. Da in diesem Falle die Induktion auf die Nadel nicht einwirkte, verharrte dieselbe in ihrer Ruhelage. Hierauf wurde die Stange hi für sich allein gehoben. Der durch die Lösung der Kette hervorgebrachte Induktionsstrom erteilte der Nadel einen Stoss, dessen Grösse sich aus dem unmittelbar auf den Stoss folgenden Ausschlag φ der Nadel bestimmt werden konnte. Derselbe Versuch wurde wiederholt, nachdem im Kommutator II die Stöpsel die Stellungen (1, 3) und (2, 4) erhalten hatten.

Bezeichnet man jetzt durch λ das logarithmische Dekrement bei

Schluss des Stromkreises $L2 \begin{array}{c} M \\ | \\ G \text{ } c \text{ } C \\ | \\ A \text{ } C \text{ } B \end{array} N$, so findet sich für diesen

Ausschlag

$$\varphi = c \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}$$

und demnach

$$\int i_0 dt = \frac{\kappa}{f_{(0)}} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{\tau_0} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \cdot \varphi.$$

und mit Hilfe des Wertes von i'_0

$$\frac{p}{w} = \frac{\Delta w_1}{w} \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}} (1 + e^{-\lambda'}) e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \frac{\varphi}{\alpha}.$$

Die Versuche ergaben für $\frac{p}{w}$ die Werte

$$\begin{array}{l} 0,0215 \text{ bei } 16,5^\circ, \\ 0,0216 \text{ „ } 16,5^\circ. \end{array}$$

Unter den Resultaten, welche die verschiedenen Versuche ergeben haben, verdienen die letzten aus den oben erwähnten Gründen entschieden den Vorzug, und sie sollen deshalb den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Man erhält aus ihnen unter Anwendung der Reduktionsformel für Kupferdraht

$$w = w_0 (1 + 0,00371 t),$$

wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des Induktors $\gamma = 2\pi$ gesetzt wird,

$$\frac{p\gamma}{w} = 0,14369 + 0,00050234 t.$$

Berechnet man nun hieraus das Potential p des Induktors auf sich selbst, indem man den Wert von w bei 0° C. zu Grunde legt,

$$w = 0,9877 \cdot 10^{10},$$

welchen spätere Messungen ergeben haben, so ergibt sich

$$p = 0,02259 \cdot 10^{10},$$

d. h. ein Wert, welcher sehr beträchtlich von dem früher S. 53 durch Rechnung gefundenen abweicht.

Wenn nun auch der Grund dieser Abweichung einer späteren Erörterung vorbehalten bleiben muss, so dürfte es doch gerechtfertigt erscheinen, in Anbetracht, dass die bei der Berechnung gemachten Annahmen in Wirklichkeit nicht zutreffen, dass bei der Bestimmung des Potentials auf sich selbst die Ersetzbarkeit des Induktors durch ein System *in sich geschlossener Ringe* noch eines besonderen Nachweises bedarf, dass es endlich fraglich erscheint, zumal im vorliegenden Falle, wo der Querschnitt des Induktordrahtes verhältnissmässig sehr gross (exklusive der Umspinnung 2,53 mm) war, ob es statthaft ist, den Draht als linear aufzufassen, die auf experimentellem Wege erhaltenen Resultate als die richtigeren anzusehen, zumal sie, selbst bei Vernachlässigung des Einflusses der Temperaturänderungen und der Polarisierung, eine viel grössere Übereinstimmung zeigen.

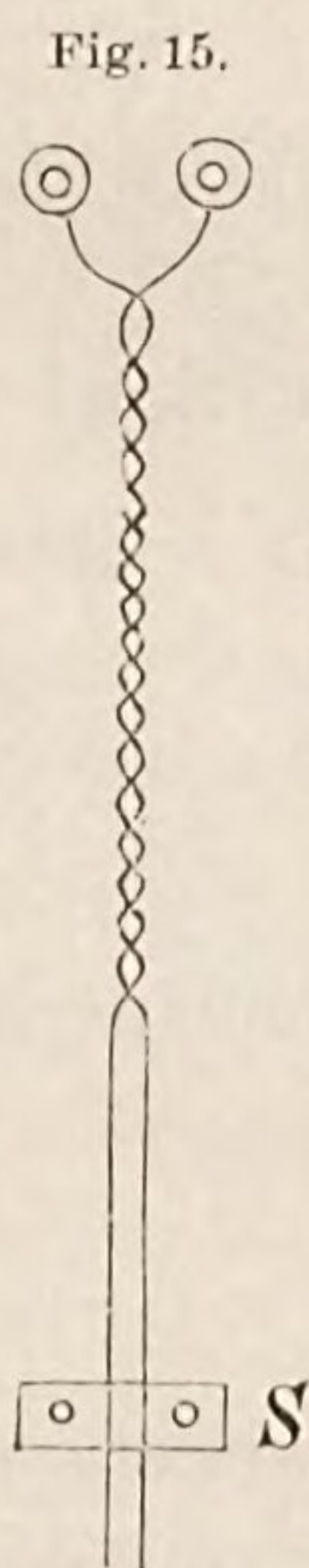
Die Normierung des Induktorwiderstandes.

Bei Bestimmung des Widerstandes von Etalons, Standards etc. in absoluten Maassen wurden bisher gewöhnlich Induktoren von grösserem Widerstand als jene Etalons in Anwendung gebracht. Da aber bei Widerstandsvergleichen die grösste Genauigkeit erhalten wird, wenn die zu vergleichenden Widerstände sehr nahe gleich sind, so musste man mehrere Etalons und Bruchtheile der letzteren verwenden, und um den letzten Rest der Verschiedenheit zu berücksichtigen, entweder sich der Wheatstoneschen Brücke oder des Interpolationsverfahrens bedienen. Solche Messungen setzen daher ausser genau bestimmten Etalonwiderständen wenigstens noch den Widerstand *einer* Unterabteilung derselben voraus. Da die genaue Bestimmung des Widerstandes einer Unterabteilung ähnliche Schwierigkeiten darbietet, wie die genaue Bestimmung der Unterabteilungen eines Gewichtssatzes, so scheint eine Methode, welche *nur* den Etalonwiderstand als gegeben voraussetzt, den Vorzug zu verdienen. Diese Methode besteht einfach darin, dass man bei Konstruktion des Induktors demselben einen dem Etalon zwar sehr nahe gleichen,

aber doch etwas kleineren Widerstand erteilt, denselben sodann durch einen Zusatzdraht bis zur völligen Gleichheit ergänzt und mit dem so normierten Induktor die Messungen nach absoluten Maassen ausführt.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, waren die Dimensionen des Induktors und die Drahtdicke von vornherein so berechnet worden, dass der Gesamtwiderstand sehr nahe gleich *einer* Siemensschen Einheit wurde. Da bei der Ausführung die Drahtdicke der berechneten nur näherungsweise gleich gemacht werden konnte, fiel der Widerstand etwas grösser aus und musste, um obige Methode in Anwendung bringen zu können, ein etwas grösserer Etalon als *eine* Siemenssche Einheit beschafft werden. Siemens & Halske hatten die Güte, die Anfertigung eines solchen Etalons von $\frac{11}{10}$ Einheiten zu übernehmen, doch zögerte sich die Ablieferung infolge von Arbeiten, welche eine neue Feststellung der Siemensschen Einheit zum Gegenstand hatten, soweit hinaus, dass an seine Stelle die Widerstandseinheit der British Association, Etalon Nr. 63, gesetzt werden musste, dessen Widerstand unmittelbar passend war. Es genügte nämlich, dem Induktor ca. $2\frac{1}{2}$ Meter dicken Kupferdraht hinzuzufügen, um Gleichheit herzustellen. Dieser Ergänzungsdraht bestand aus zwei seilartig umeinander gewundenen Drähten, deren obere Enden (Figur 15) mit den Drahtenden des Induktors verbunden wurden, deren untere Enden dagegen in zwei von der Umspinnung befreite Drähte ausliefen, längs welchen sich eine mit zwei Nuten versehene Kupferklemme *S* verschieben liess. Wurden die beiden Platten, aus denen die Klemme bestand, mittelst Schrauben scharf gegeneinander gedrückt, so war damit eine vollkommen sichere Verbindung hergestellt. Bei Einstellung der Klemme auf Gleichheit der Widerstände kann hierbei das Interpolationsverfahren zur Anwendung kommen, indem man aus mehreren Stellungen der Klemme diejenige berechnen kann, für welche Gleichheit eintritt. Der Ergänzungsdraht wurde, nachdem die Klemme ihre endgiltige Stellung erhalten hatte, in einer und einer halben Windung an der äusseren Peripherie des Induktors befestigt und nahm an der rotierenden Bewegung desselben teil, ohne auf die in der Mitte des Induktors befindliche Nadel direkt einzuwirken.

Zur Ausführung dieser Versuche diente ein sehr empfindlicher Differentialgalvanometer von geringem Widerstand. Die Zweigdrähte waren umeinander gewunden und sodann auf den Galvanometerahmen aufgewickelt worden, wodurch erreicht wurde, dass die Drehungsmomente der beiden Zweige untereinander genau gleich waren.



Bei den Versuchen wurde diese Gleichheit durch die bekannte Methode des Umschaltens geprüft.

Die Vergleichung geschah nach der von F. Kohlrausch* angegebenen Methode mittelst induzierter Ströme, und da diese Methode infolge der Verschiebung, welche die Nadel durch Selbstinduktion erleidet, bei völliger Gleichheit der Widerstände unsicher wird, wurde der Widerstand des einen oder anderen Zweiges des Differentialgalvanometers, in welche einerseits der Induktor mit Ergänzungsdraht, andererseits der Etalon eingeschaltet war, *abwechselnd* durch Einschaltung eines Hilfsdrahtes (200 mm lang, 2 mm dick) um gleichviel vergrößert und dabei die Klemme *S* solange verschoben, bis die den Einschaltungen entsprechenden Grenzausschläge der Nadel gleich waren.

Zur Verbindung der Drähte, welche hierbei besonders sicher sein musste, wurde die von Wilhelm Weber*** angegebene Würfelverbindung benutzt.

Bei der Normierung des Induktorwiderstandes besass der Induktor draht die Temperatur $13,7^{\circ}\text{C}$., der Etalon dagegen die Temperatur $13,3^{\circ}\text{C}$. Hiernach ist, wenn der Etalonwiderstand durch E bezeichnet wird,

$$w_{13,7} = E_{13,3}.$$

Der Etalon hatte bei $15,8^{\circ}\text{C}$. genau den Widerstand 1 Ohm. Hiernach ergibt sich unter Anwendung der für das Temperaturintervall 10 bis 20° giltigen Reduktionsformel

$$E = 1 + 0,00031 (t - 15,8) \text{ Ohm}$$

und der Reduktionsformel für Kupferdraht

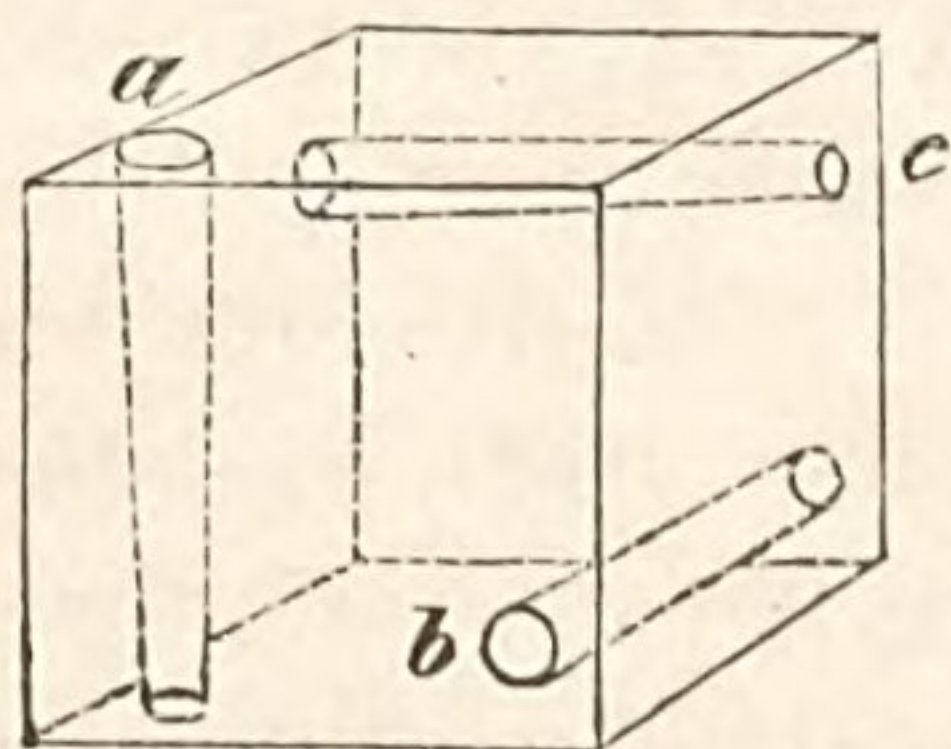
$$w = w_0 [1 + 0,00371 t]$$

$$1 \text{ Ohm} = \frac{1 - 0,00371 (t - 13,7)}{0,999225} \cdot w,$$

woraus der Wert *eines* Ohm in absolutem Maasse gefunden wird, wenn der Widerstand w für die Temperatur t in absolutem Maasse gegeben ist.

* Poggendorffs Annalen, Bd. 142 S. 418.

*** Ein Kupferwürfel (Figur 16) von ca. 16 mm Seite ist an den Stellen *a*, *b*, *c* mit konischen Durchbohrungen versehen, in welche sich eingeschliffene Kupferkonuse einstecken lassen. Diese Konuse sind mit ihrem einen Ende an die Leitungsdrähte verlötet; die am anderen Ende befindliche Schraube mit Mutter gestattet, sie fest in die Löcher einzudrücken.



Bestimmung der Inklination.

Die Inklination wurde durch einen kleinen von Meyerstein in Göttingen gelieferten Erdinduktor auf bekannte Weise ermittelt. Der Durchmesser der äusseren Drahtschicht derselben betrug 168 mm, die Breite der Rolle 86 mm. Das Instrument war in nahezu gleicher Höhe mit dem Rotationsinduktor und in einem Horizontalabstand von circa 800 mm von demselben auf einen Stein fest aufgestellt. Um jede Änderung in der Aufstellung bei Erteilung der Induktionsstösse zu vermeiden, waren die drei Untersätze, auf welchen das Instrument ruhte, nach seiner Orientierung mit Cement an den Stein befestigt worden. Das Nivellieren bei horizontaler und vertikaler Stellung der Drehungsaxe wurde vermittelt einer Libelle ausgeführt, bei welcher der Teilstrich (1 Pariser Linie) einem Winkel von 11 Sekunden entsprach. Das Laboratorium, in welchem der kleine Erdinduktor sowie der Rotationsinduktor Aufstellung erhalten hatte, war völlig eisenfrei, so dass der geringe Abstand der beiden Induktoren nicht in Rechnung gezogen zu werden brauchte. Ursprünglich hatte die Absicht vorgelegen, vor und nach jedem Beobachtungssatze mit dem Rotationsinduktor eine Inklinationsbestimmung vorzunehmen und den hieraus berechneten Mittelwert der Rechnung zu Grunde zu legen. Allein es zeigte sich, dass der disponible Induktor nicht hinlänglich stabil gebaut war, um die Variationen mit Sicherheit festzustellen. Aus diesem Grunde wurde vorgezogen, die Inklination aus einer Reihe von Messungen ein für allemal festzustellen. Vier Bestimmungen ergaben folgende Resultate:

$$66^{\circ} 40' 35'',$$

$$66^{\circ} 36' 34'',$$

$$66^{\circ} 39' 18'',$$

$$66^{\circ} 39' 31'',$$

woraus der Mittelwert

$$i = 66^{\circ} 38' 59''$$

gefunden wird.

Beschreibung des Rotationsinduktors.

Bei Konstruktion des Rotationsinduktors sind zwei Gesichtspunkte vor allem massgebend gewesen. Es sollte 1) der Induktor *mit seinem Gestell* um eine vertikale Axe drehbar sein; es sollte 2) die Übertragung von Erschütterungen, die aus der Umdrehung des Induktorringes hervorgehen können, auf die in der Mitte des

Induktors aufgehängene Nadel vermieden werden. Beiden Anforderungen wurde auf folgende Weise Genüge geleistet.

Zwei grosse kreisrunde Sandsteine von 1200 mm Durchmesser und 150 mm Dicke (Taf. II, Fig. 5 und 6) waren aufeinander geschliffen worden. Der untere Stein, welcher auf dem untermauerten, mit Asphalt überzogenen Boden auflag und durch drei breite Keile von kleinem Winkel horizontal gestellt werden konnte, besass in seinem Centrum einen Zapfen aus Messing; im Centrum des oberen Steines dagegen war eine messingene Hülse eingekittet, in welche der Zapfen eingriff. Um die Reibung zwischen beiden Steinen zu vermindern, war der untere Stein an seiner äusseren Peripherie bis auf einen circa 100 mm breiten Rand durch Ausmeisseln vertieft, der Rand mit heissem Paraphin getränkt und sodann mit einem Überzug von Graphit versehen worden. In zwei in den oberen Stein eingelassene Messingbügel aa' konnte der hölzerne Hebel b (in der Figur nur angedeutet) eingeschoben und der obere Stein auf den unteren gedreht werden.

Zu feinerer Orientierung diente die Vorrichtung cc' . Sie besteht aus einer langen Holzschraube, deren Ende c mittelst eines vertikalen Zapfens an der Mauer des Laboratoriums befestigt ist. Längs der Schraube bewegt sich wie eine Schraubenmutter der Rahmen dd' , welcher durch eine Art Kugelgelenk mit der Stange ee' verbunden ist, die ihrerseits wiederum auf den in den Stein eingelassenen Messingzapfen c' aufgesetzt ist. Durch Drehung des Rahmens dd' wird die Entfernung zwischen Wand und Zapfen c' vergrössert oder verkleinert und daher der obere Stein in dem einen oder anderen Sinn gedreht. Diese Vorrichtung gestattete die Einstellung der Drehungsaxe des Induktors in die Richtung der magnetischen Axe sowohl bei Rechts- oder Linksdrehung des Induktorringes auf das genaueste auszuführen.

Auf den oberen Stein war das aus Eichenbohlen von quadratischem Querschnitt (95 mm Seite) hergestellte Gerüst AB mit in den Stein eingelassenen Messingschrauben befestigt, welches die Lager für die Induktorrolle enthielt. Das eine Lager befand sich auf dem fest mit dem Rahmen verbundenen Querstück c , das zweite Lager dagegen konnte mittelst einer Schraube gehoben und gesenkt werden. Das Querstück D war zu diesem Zwecke zwischen den beiden Ständern des Gerüsts verschiebbar, konnte aber, was nach jeder Berichtigung der Axenlager geschah, mittelst Schrauben, welche durch in beiden Ständern befindliche Schlitze hindurchführten, mit dem Gerüste unveränderlich fest verbunden werden.

Der Induktorring, in Taf. II Figur 5, 6 und 7 dargestellt, besteht aus einer grossen Anzahl in verschiedenen Richtungen zusammengeleimten Stücken von völlig trockenem Mahagoniholz, seine Drehungsaxe bilden zwei Kupferröhren von 48 mm Durchmesser. Diese Röhren waren streng in den Holzring eingepasst und mittelst der angelöteten Messingplatten *E* und der Schraubenmutter *F* unveränderlich fest mit dem Ring verbunden. Mit der äussersten Sorgfalt waren ferner auf der Bahnhofswerkstätte zu Braunschweig die kupfernen Axen und der Holzring in doppelter Weise so abgedreht worden, dass die Drehungsaxe und die Ringaxe sich in einem Punkte trafen und gleichzeitig auf einander senkrecht standen. Der äussere und innere Radius des Holzringes betrug 275 und 190 mm, die Höhe desselben 180 mm, die Tiefe jeder Nute, welche in gleichem Abstände von der Drehungsaxe in den Ring eingedreht waren, 45 mm. Die Dicke der zwischen der Grundfläche der Nuten und der inneren Begrenzungsfläche des Holzringes stehende Holzschicht war hier nach 40 mm, und man konnte dieselbe, ohne Eintrag für die Unveränderlichkeit des Ringes, an den Stellen *G*, welche bei der Rotation des Induktors in nächste Nähe mit der Aufhängung der Nadel kommen, etwas verringern, um einen möglichst langen Aufhängefaden in Anwendung bringen zu können.

Um ferner der Nadel in der Mitte des rotierenden Induktors eine geeignete Aufstellung zu geben, war durch die hohle Axe des Induktors ein 20 mm dicker Messingcylinder frei hindurch geführt, dessen eines Ende an einem 465 mm hohen, 340 mm breiten und 180 mm dicken Stein *H* befestigt ist. Dieser Stein ruhte, ohne mit dem Holzgerüst in Berührung zu kommen, auf dem oberen drehbaren Stein und war mit demselben durch Kitt fest verbunden. An das andere Ende des Messingcylinders war eine winklig gebogene Messingplatte *K* geschraubt, deren horizontaler Teil den Untersatz für das die Nadel tragende Gehäuse bildete.

Die Stellung des Gehäuses wurde durch drei an passenden Stellen durch die Platte gehenden Schrauben reguliert, auf denen dasselbe ruhte. Um die Aufstellung des Gehäuses völlig zu sichern, hatte die Platte in ihrer Mitte eine grössere Öffnung, durch welche eine in der Bodenplatte des Gehäuses befestigte Schraube hindurch trat. Vermittelst eines über die Schraube geschobenen Messingbleches und einer Mutter (Taf. II Fig. 8) liess sich das Gehäuse fest gegen die Stellschrauben drücken und ihm auf diese Weise, trotz einer innerhalb gewisser Grenzen möglichen Verschiebbarkeit, eine feste Aufstellung geben.

Das Gehäuse bestand aus einem kleinen Kasten von Mahagoni-holz mit aufgesetztem Glasrohr. An dem oberen Ende des Glasrohres war ein Torsionskreis mit bekannter Aufhängeeinrichtung zum Heben und Senken des Magneten befestigt. Der Magnet wurde von vier 185 mm langen Coconfäden getragen, welche, nachdem jeder einzelne detordiert war, zu einem einzigen Faden vereinigt wurden. Der cylindrische Magnet von 100,8 mm Länge und 8,2 mm Durchmesser war unter Anwendung einer dreimal längeren Drahtspirale und zwei vorgesetzten Ankern sorgfältig symmetrisch magnetisiert worden, so dass die Annahme, seine magnetische Axe fiel mit seiner geometrischen Axe zusammen, jedenfalls sehr nahe erfüllt war. Für das Verhältnis zwischen Nadelmagnetismus und der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus fand sich längere Zeit nach dem Magnetisieren, aber unmittelbar vor den mit der Nadel angestellten Versuchen,

$$\frac{M}{T} = 5480300.$$

An den Enden trug der Magnet zwei kleine Planspiegel S , die durch Hülsen so an demselben befestigt waren, dass die Spiegelnormale in die durch die geometrische Axe des hängenden Magneten gelegte Vertikalebene fielen. In zwei in gleichem Abstände von der Mitte des Magneten eingedrehten Rollen fassten zwei Messinghaken ein, welche ein dünnes an beiden Enden durch Bleigewichte beschwertes Holzstäbchen trugen. In der Mitte des Holzstäbchens war ein dritter Spiegel S' befestigt, welcher zur Beobachtung des Winkels ψ diente zwischen der Gleichgewichtslage der Nadel bei ruhendem und rotierendem Induktor. Bei möglichster Leichtigkeit (das Gehänge wog 145,39 g) besass das Gehänge ein verhältnissmässig grosses Trägheitsmoment, so dass sich die Schwingungsdauer auf 20,573 Sekunden stellte. Das Innere des Gehäuses liess sich durch in Nuten gehende Schieber, welche zugleich die Seitenwände bildeten, vollständig abschliessen. Die eine dieser Seitenwände und die eine Vorderwand des Gehäuses besaßen in Spiegelhöhe Öffnungen, welche durch Plangläser verschlossen waren und durch welche vermittelst Fernrohr und Skala die Bewegungen der Nadel beobachtet werden konnten. Die am Torsionskreis zum Durchlassen des Coconfadens befindliche Öffnung wurde durch Überstürzen eines kleinen Glasgefässes und nachheriger Dichtung mit Baumwolle für Luftzug unschädlich gemacht.

Um prüfen zu können, ob der Voraussetzung gemäss die Mitte des Magneten mit der Mitte des Induktors zusammenfällt, und ob die magnetische Axe horizontal ist, waren beim Abdrehen des Induktors

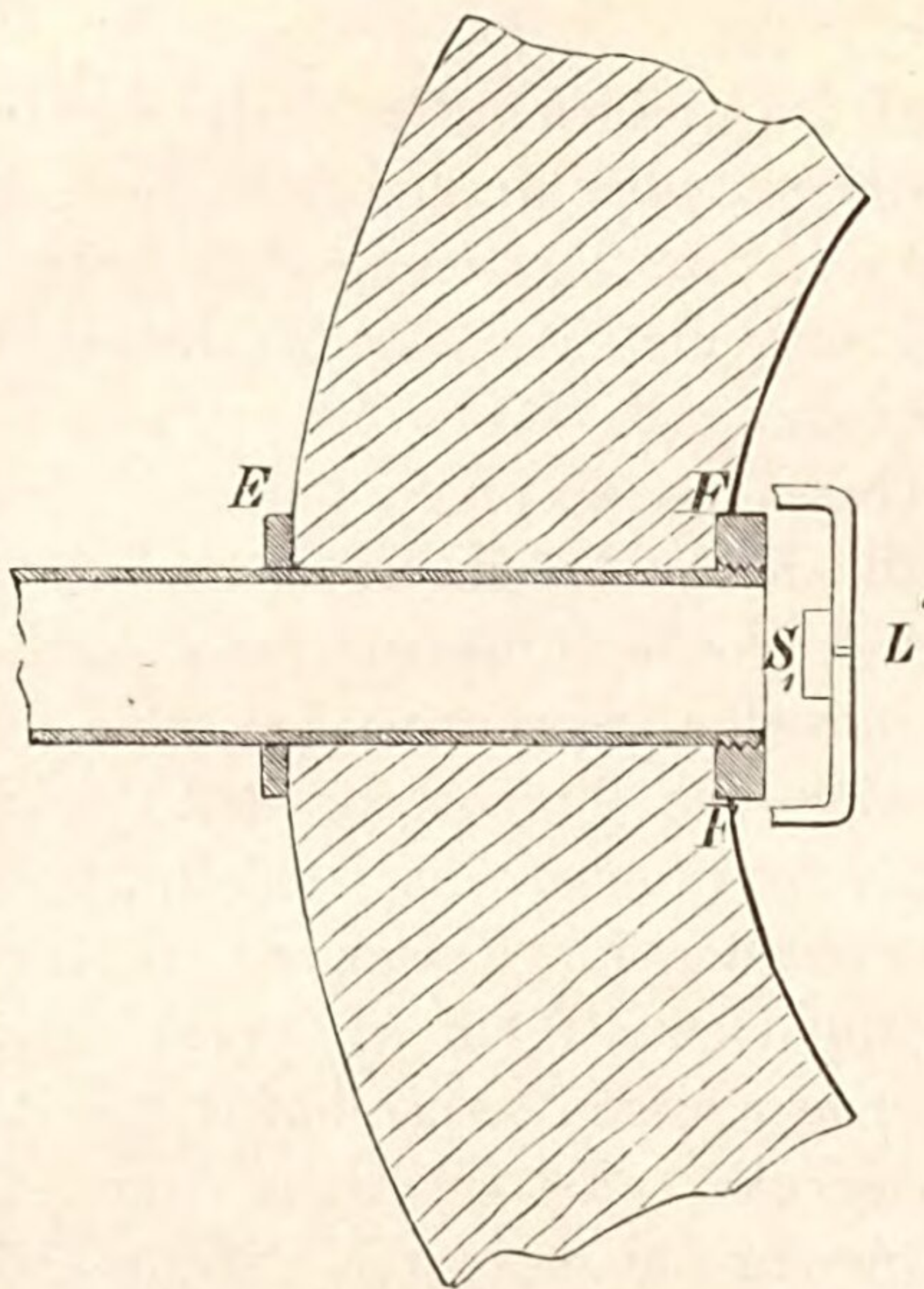
auf jeder Seitenfläche des Induktorringes eine horizontale und eine vertikale Linie mit dem Support auf der Drehbank so eingerissen worden, dass die durch die horizontalen Linien gelegte Ebene die Drehungsaxe, die durch die vertikalen Linien gelegte Ebene die Ringaxe in sich enthielten, und dass dabei die beiden Ebenen auf einander senkrecht standen. Zwei längs dieser Linien auf jeder Seitenfläche ausgespannte Coconfäden bilden zwei rechtwinklige Fadenkreuze. Einerseits durch Visieren über die gespannten Fäden, andererseits durch Abmessung des Abstandes des Aufhängefadens von den beiden Vertikalfäden konnte die Lage des Magneten der genauesten Prüfung unterzogen werden.

Die Drehung des Induktorringes wurde mit der *Hand* vermittelst einer Kurbel bewerkstelligt, welche auf das Ende der zweiten, die Drehungsaxe des Induktorringes bildenden Kupferrohres aufgesetzt war. Bei der Umdrehung stiess dieselbe gegen eine bei *J* an dem Gerüste befestigte Feder; der hierdurch hervorgebrachte, scharf begrenzte Schall gestattet dem Induktor genau die Umdrehungszeit von *einer* Sekunde zu erteilen. Die Pendelschläge einer mit Sekundenpendel versehenen Uhr wurden auf elektrischem Wege auf einen Registrirapparat übertragen, welcher durch Ankeranziehung die Sekunden laut und deutlich wiedergab. Es erforderte nur eine kurze Einübung, um bei der Umdrehung des Induktors den Anschlag der Kurbel gegen die Feder *J* sehr genau mit dem Sekundenschlage zusammenfallen zu lassen. Die Grösse und das Gewicht des Induktors bildete dabei den besten Regulator für die Gleichförmigkeit im Drehen. Jede durch die Umdrehung etwa erzeugte Erschütterung musste sich, um auf die Nadel übertragen zu werden, zunächst auf das Gerüst *AB*, von diesem durch den oberen grossen Stein, ferner durch den Stein *H* und endlich durch die Messingstange fortflanzen. Eine solche Übertragung wurde bei den Versuchen überhaupt nicht wahrgenommen.

Mit dem oberen drehbaren Stein war endlich mittelst eingelassener Schrauben eine Gabel aus dickem Eichenholz unveränderlich verbunden, welche an ihrer Spitze einen kleinen in vertikaler Richtung verschiebbaren Tisch *L* trug. Der Mittelpunkt der Tischplatte fiel dabei in die durch die Drehungsaxe des Induktors gelegte Vertikalebene. Auf diesen Tisch wurde dasjenige Fernrohr mit Skala aufgestellt, welches zur Bestimmung des Winkels ω diente, den die Drehungsaxe mit der magnetischen Axe der Nadel bei rotierendem Induktor bildete. Der Winkel ω ergab sich auf folgende einfache und zugleich exakte Weise.

Um zunächst die Richtung der Fernrohraxe gegen diejenige der Drehungsaxe festzustellen, wurde über die auf der Kupferröhre aufgeschraubte Schraubenmutter F eine Kapsel C (Fig. 17) fest aufgeschoben, in deren Centrum

Fig. 17.



ein kleiner Spiegel S_1 befestigt war. Man brachte zunächst die Fernrohraxe und die Drehungsaxe in ein und dieselbe Vertikalebene. Zu diesem Zwecke wurden die Skalenteile s_1 und s_2 beobachtet, welche zwei um 180 Grad verschiedenen Stellungen des Induktors entsprachen, und gab dabei dem Fernrohre eine solche Aufstellung, dass das arithmetische Mittel $\frac{s_1 + s_2}{2}$ zugleich den Skalenteil s_0 angab, welcher von der durch die Fernrohraxe gelegten Vertikalebene auf der Skala markiert wurde. Entfernt man sodann die Kapsel und beobachtet durch

den Spiegel der ruhenden Nadel den Skalenteil s' , so ist

$$\omega = \frac{s' - s_0}{2r},$$

wenn r den Abstand zwischen Spiegel und Skala bezeichnet.

Die relative Lage der Fernrohraxe zu der Drehungsaxe des Induktors bleibt während den Versuchen unverändert und kann durch Aufstecken der Kapsel L' jederzeit kontrolliert werden.

Ein zweites, auf den Spiegel des Gehänges eingestelltes Fernrohr diente zur Bestimmung des Winkels ψ , welchen die Nadelstellungen bei ruhendem und rotierendem Induktor mit einander bilden. Der Umstand, dass der Induktorring bei jeder Umdrehung zweimal durch das Gesichtsfeld hindurch geht, übt auf die Ablesungen keinen störenden Einfluss aus.

In Bezug auf die zur Konstruktion des Apparates verwendeten Messing- und Kupferteile möge noch hinzugefügt werden, dass sie sämtlich von ihrer Verwendung auf etwaige magnetische Wirkungen untersucht wurden. Der ganze Apparat, mit Ausnahme des Ab-

drehens des Induktorringes, ist in der Werkstatt der physikalischen Abteilung der Herzoglich technischen Hochschule hierselbst durch den Mechaniker Müller in vorzüglicher Weise angefertigt worden.

Schlussbeobachtungen.

Nachdem mit Hilfe von drei zwischen dem Erdboden und dem unteren Stein eingeschobenen Keilen und einer Libelle die Axe beider Steine vertikal gestellt worden war, gab man dem Induktor zunächst die Meridianstellung, d. h. diejenige Stellung, in welcher bei ruhendem Induktor die magnetische und die Drehungsaxe zusammen fallen. Diese Stellung wurde durch zwei korrespondierende Striche auf der seitlichen Begrenzungsfläche der beiden Steine ein für allemal markiert. Die Kurbel befand sich hierbei am Süden der Drehungsaxe. Eine bei dieser Stellung der Bewegung des Uhrzeigers entsprechende Drehung möge als *positiv*, die entgegengesetzte Drehung als *negativ* bezeichnet werden.

Durch zwei Vorversuche, bei welchen die Drehung des Induktors in positivem und negativem Sinne erfolgte, wurden diejenigen Stellungen zu beiden Seiten der Meridianstellung ermittelt und markiert, welche der obere Stein einnehmen musste, damit bei rotierendem Induktor wiederum die magnetische und die Drehungsaxe wenn nicht völlig, so doch sehr nahe in einander fielen. Bevor der Induktor in einer dieser Stellungen in gleichförmige Rotation gesetzt wurde, stellte man die Drehungsaxe durch Aufsetzen einer Brücke auf die abgedrehten und gleichen Durchmesser besitzenden Kupferröhren unter Anwendung einer Libelle, bei welcher ein Teilstrich (1 Par. Lin.) dem Winkel 11 Sekunden entsprach, genau in die Horizontalebene. Sodann beobachtete man den Ruhestand, den die Nadel bei dieser abgelenkten Stellung des ruhenden Induktors besass. In gleicher Weise wurde auch *nach* jedem Beobachtungssatze der Ruhestand beobachtet und der Mittelwert als der für den Beobachtungssatz giltige Ruhestand angesehen. Durch anfänglich langsameres, später aber in den vorgeschriebenen Takt übergehendes Drehen erreichte man, dass die Nadel sich allmählich seiner Grenzlage näherte und nur kleine Schwingungen um dieselbe ausführte. Man beobachtete nun vermittelst der beiden Fernröhre die Umkehrungspunkte, aus denen nach den Regeln über die Schwingungen gedämpfter Nadeln die jedesmalige Gleichgewichtslage der Nadel berechnet wurde. Der Mittelwert in Verbindung mit dem Ruhestand giebt alsdann den Winkel ψ , welchen die Nadelstellungen bei ruhendem und rotierendem

Induktor mit einander bilden, und der Mittelwert der am zweiten Fernrohr ausgeführten Beobachtungen bestimmt den Winkel ω , welchen die magnetische Axe mit der Drehungsaxe bildet.

Um die Temperatur des Induktordrahtes festzustellen, soweit dies möglich ist, war in das Gerüst halb so tief als die Tiefe der Nuten betrug, ein Thermometer eingelassen, an welchem vor und nach jedem Beobachtungssatze die Temperatur abgelesen wurde.

Jeder Beobachtungssatz bestand aus der Beobachtung von 15 Umkehrungspunkten. Als Beispiel möge der folgende Beobachtungssatz dienen. Der Abstand zwischen dem Spiegel des Gehänges und der Skala betrug dabei 2394,8 Skalenteile, der Abstand des Spiegels der Nadel und der Skala 1112,2 Skalenteile.

Um- kehrungs- punkt Nr.	ψ			ω		
	Ablesung.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Ablesung.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.
1	44,8	83,80		493,9	511,40	
2	122,8	84,35	84,07	528,9	511,55	511,47
3	45,9	85,00	84,67	494,2	511,90	511,72
4	124,1	86,30	85,67	529,6	512,50	512,20
5	48,5	85,15	85,72	495,4	511,85	512,17
6	121,8	85,85	85,50	528,3	512,20	512,02
7	49,9	85,45	85,65	496,1	512,00	512,10
8	121,0	84,75	85,10	527,9	511,65	511,82
9	48,5	84,65	84,70	495,4	511,65	511,65
10	120,8	86,25	84,45	527,9	512,35	512,00
11	51,7	86,30	86,27	496,8	512,30	512,32
12	120,9	84,75	85,52	527,8	511,60	511,95
13	48,6	84,95	84,85	495,4	511,80	511,70
14	121,3	85,15	85,05	528,2	511,95	511,87
15	49,0			495,7		
		Mittel 85,25			Mittel 511,92	

Ruhestand am Anfang 605,98,
am Ende . 605,52,
Mitte 605,75.

Stand der Drehungsaxe
= 511,3.

Hieraus findet sich

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{520,50}{2394,8} \right) = 6^{\circ} 7' 52,2'',$$

$$\omega = - \frac{0,62}{2224,4} = - 57,5''.$$

Bei diesen Beobachtungen hätten die Schwingungen der Nadel um ihre Gleichgewichtslage leicht verkleinert werden können, indess liess die grössere Sicherheit bei Ablesung der Umkehrungspunkte etwas grössere Ablenkungen vorteilhaft erscheinen.

Der Torsionskoeffizient θ des Aufhängefadens wurde durch besondere Beobachtungen bestimmt. Erteilt man dem sorgfältig detordierten Aufhängefaden mittelst des Torsionskreises nacheinander eine Reihe Drehungen χ nach beiden Seiten von der Nulllage und beobachtet die entsprechenden Ablenkungswinkel φ der Nadel, so ist

$$\theta = \frac{\Sigma \varphi}{\Sigma \chi - \Sigma \varphi}.$$

Für den Faden im Rotationsinduktor fand sich

$$\theta = 0,0035419.$$

In der beschriebenen Weise wurden nun je vier Beobachtungssätze mit positiver resp. negativer Drehung ausgeführt. Bei diesen Versuchen sowohl, wie bei einer grösseren Anzahl von Vorversuchen hatten die Herren Gymnasiallehrer Geitel, Dr. Elster und Herr Privatdocent Dr. Wernicke die Güte, mich bei den Beobachtungen zu unterstützen. Die Resultate sind in folgender Tafel zusammengestellt.

Satz	2ψ in Skalen- teilen.	2ω in Skalen- teilen.	Tem- peratur.	Abstand der Skale (ψ).	Abstand der Skale (ω).
Positive Drehung.					
1	520,50	— 0,62	17,14	} 2394,8	1112,2
2	520,29	— 0,51	17,34		
3	521,21	— 0,61	16,88	} 2401,9	
4	521,31	+ 0,59	16,92		
Negative Drehung.					
1	521,82	— 1,75	17,65	} 2394,8	1112,2
2	521,81	— 2,13	17,74		
3	524,02	+ 0,40	16,58	} 2401,9	
4	524,53	+ 0,27	16,66		

Mit Hilfe der Gleichung 13) S. 30, in welcher

$$\alpha = (1 + \theta) \psi - \omega$$

zu setzen ist, ferner mit Hilfe der Reduktionsformel S. 66 und den früher bestimmten Konstanten findet sich hieraus der Wert von 1 Ohm nach absolutem Maasse

Satz	Positive Drehung.	Negative Drehung.	Mittel.
1	0,98915,10 ¹⁰	0,98347,10 ¹⁰	0,9863,10 ¹⁰
2	0,98881	0,98466	0,9867
3	0,99138	0,98733	0,9893
4	0,99116	0,98606	0,9886

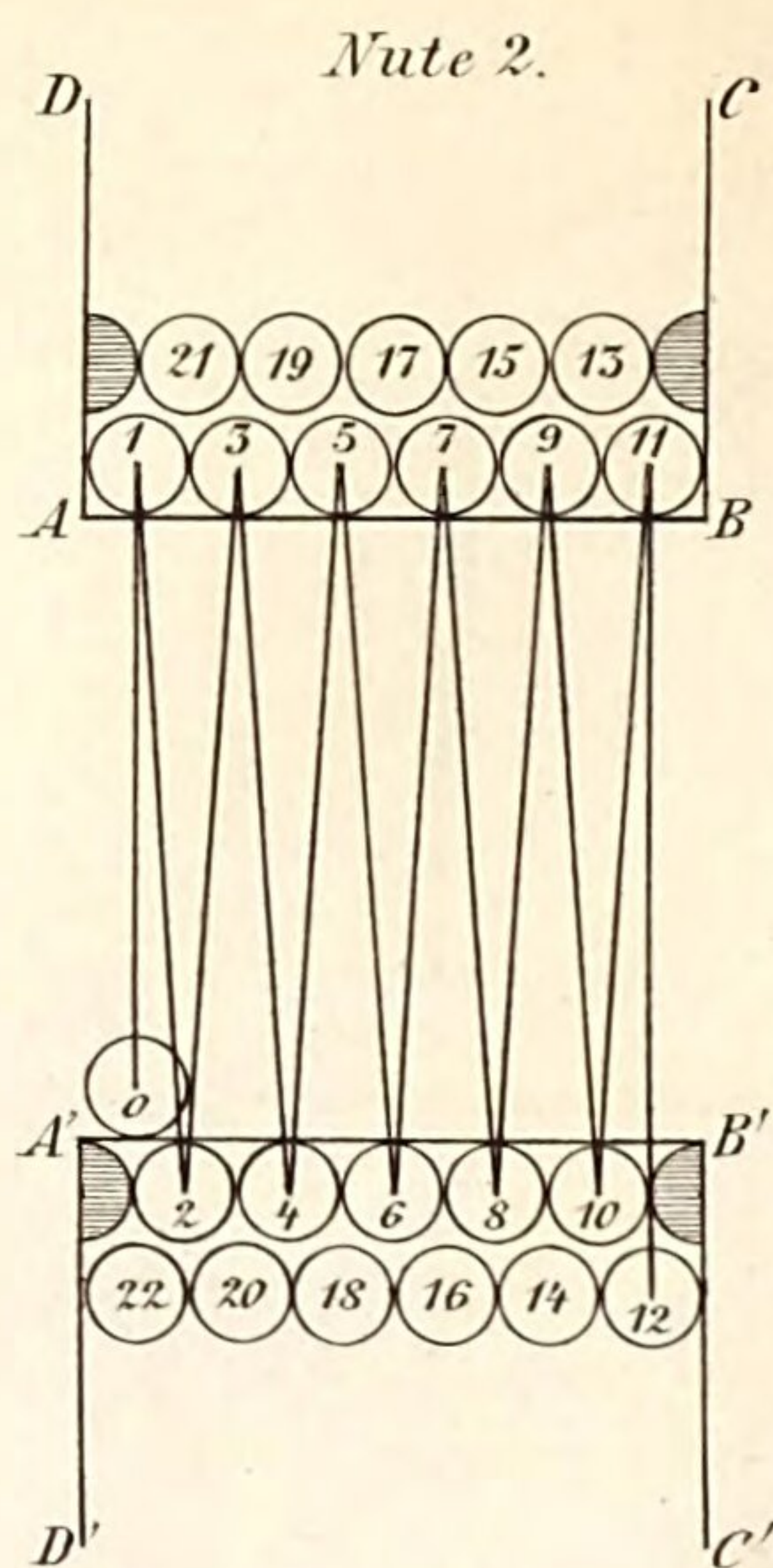
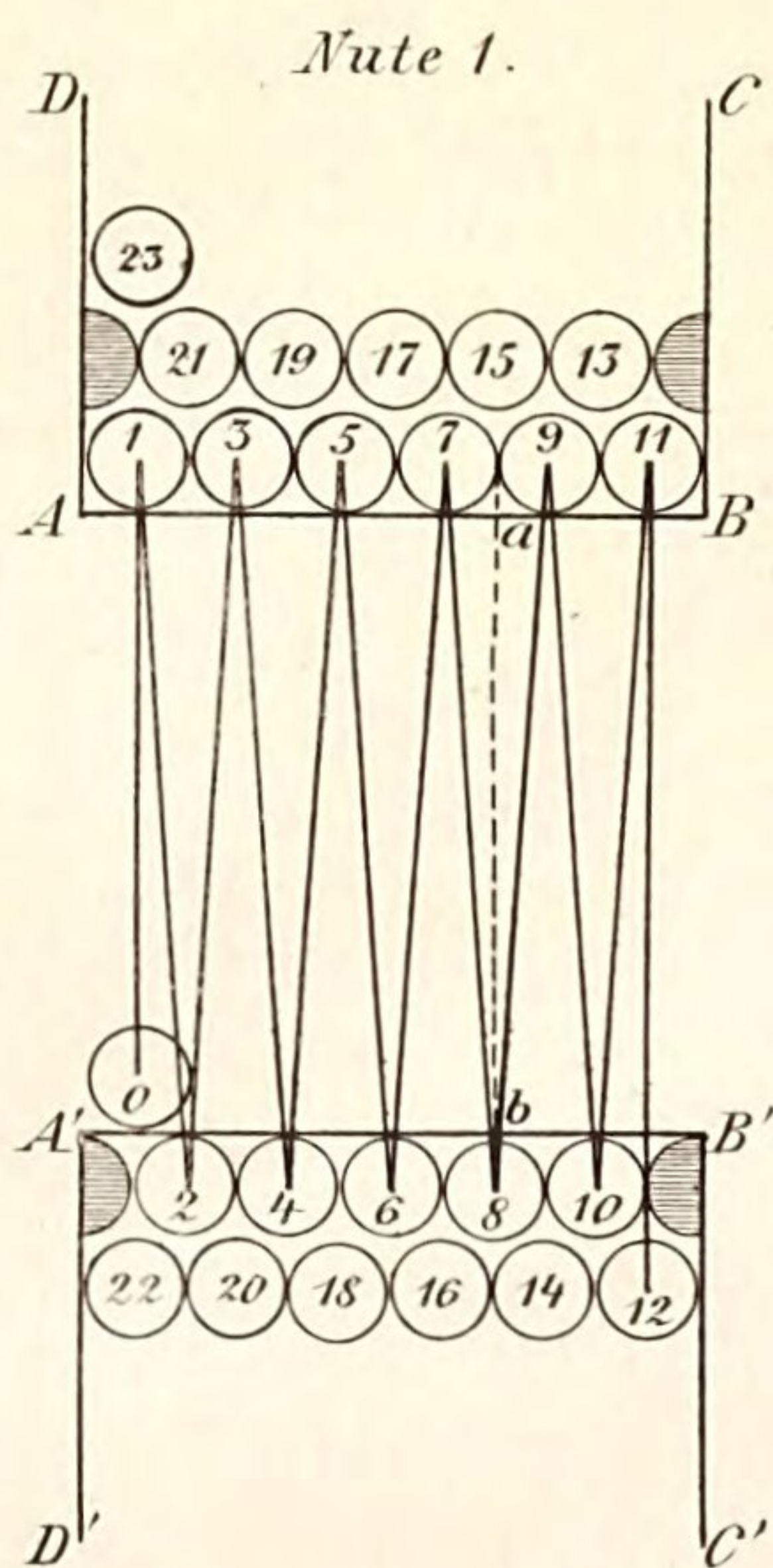
und demnach folgt als Mittelwert sämtlicher Beobachtungen

$$1 \text{ Ohm} = 0,9877,10^{10} \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}.$$

Die bei diesen ebenso wie bei den englischen Beobachtungen hervortretende Differenz bei positiver und negativer Drehung kann — worauf Herr Dr. Schuster* aufmerksam gemacht hat — auf Luftströmen beruhen, welche durch die Rotation im Innern des Nadelgehäuses hervorgerufen werden. Gleichwohl konnte eine merkliche Einwirkung der Rotation auf die Nadel bei *offener* Kette nicht konstatiert werden.

* Proceedings of the Royal Society No. 213, 1881, S. 132.

Fig. 1.



ϕ

Fig. 2.

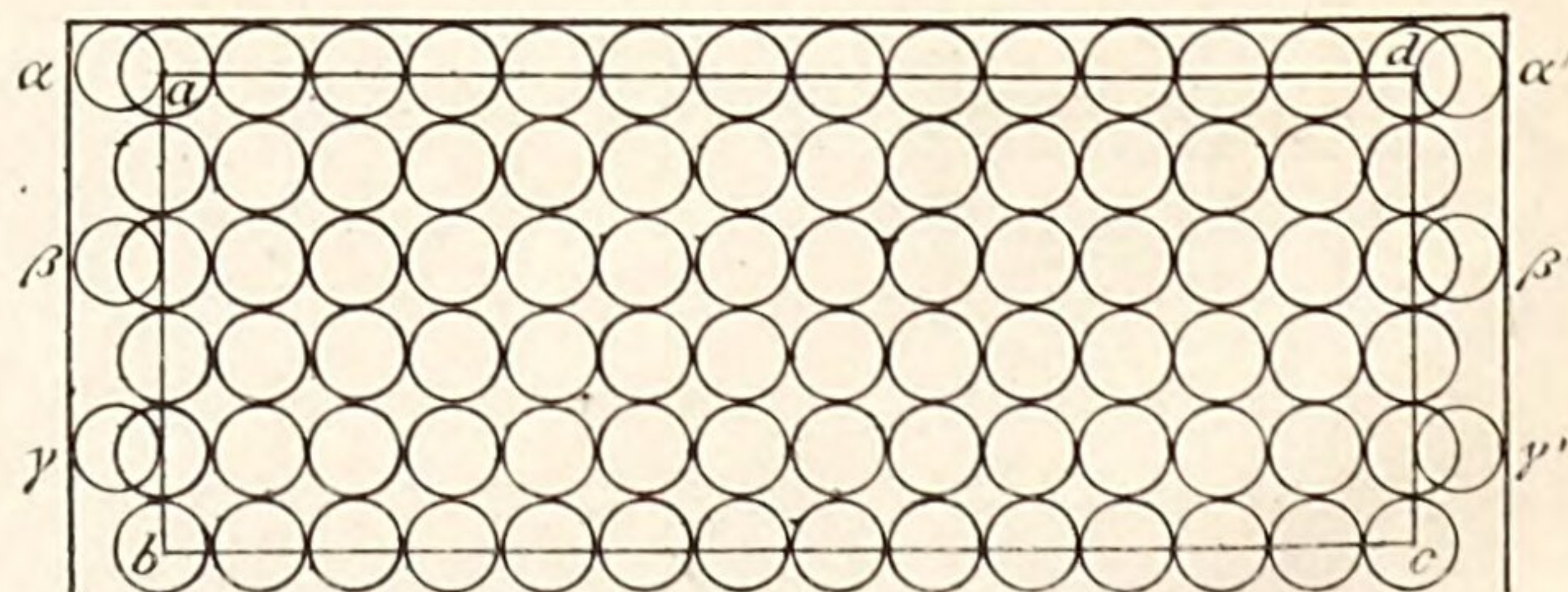
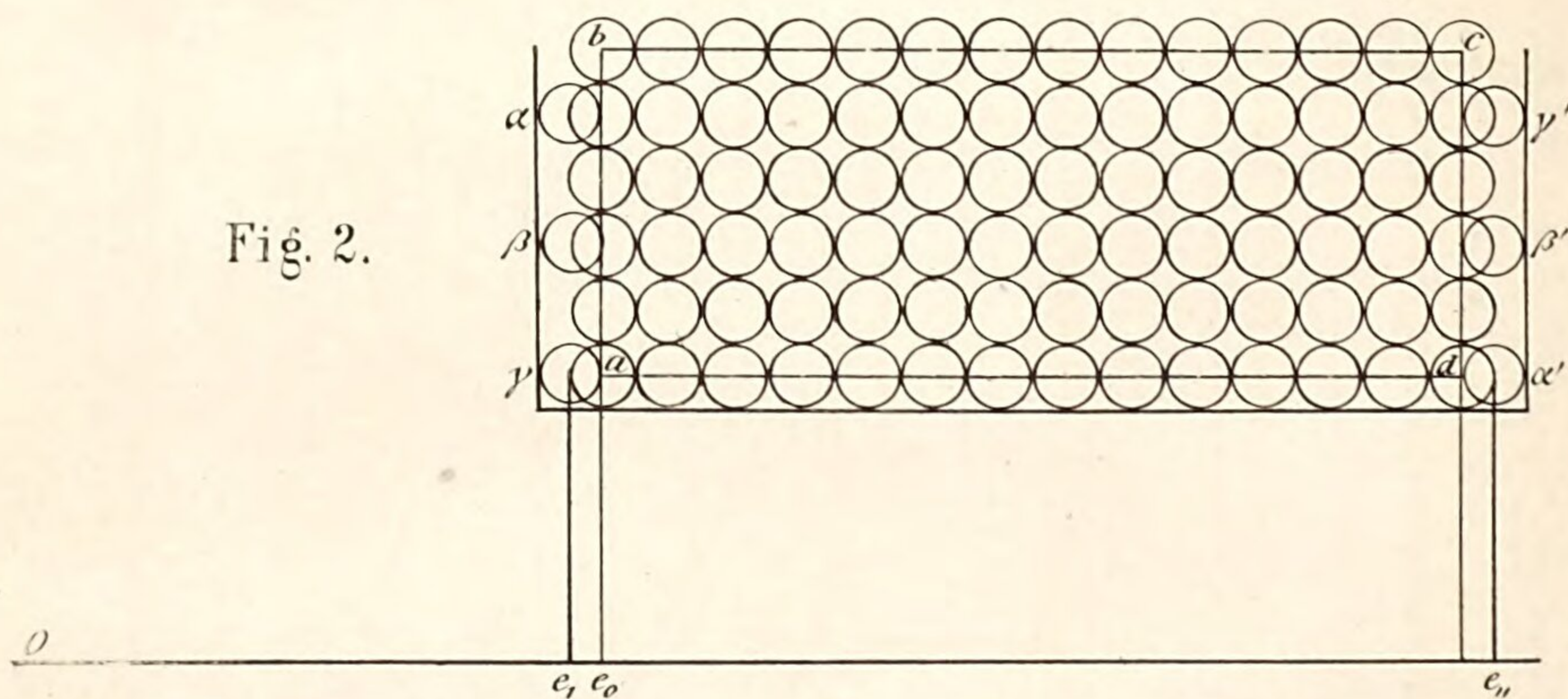


Fig. 3.

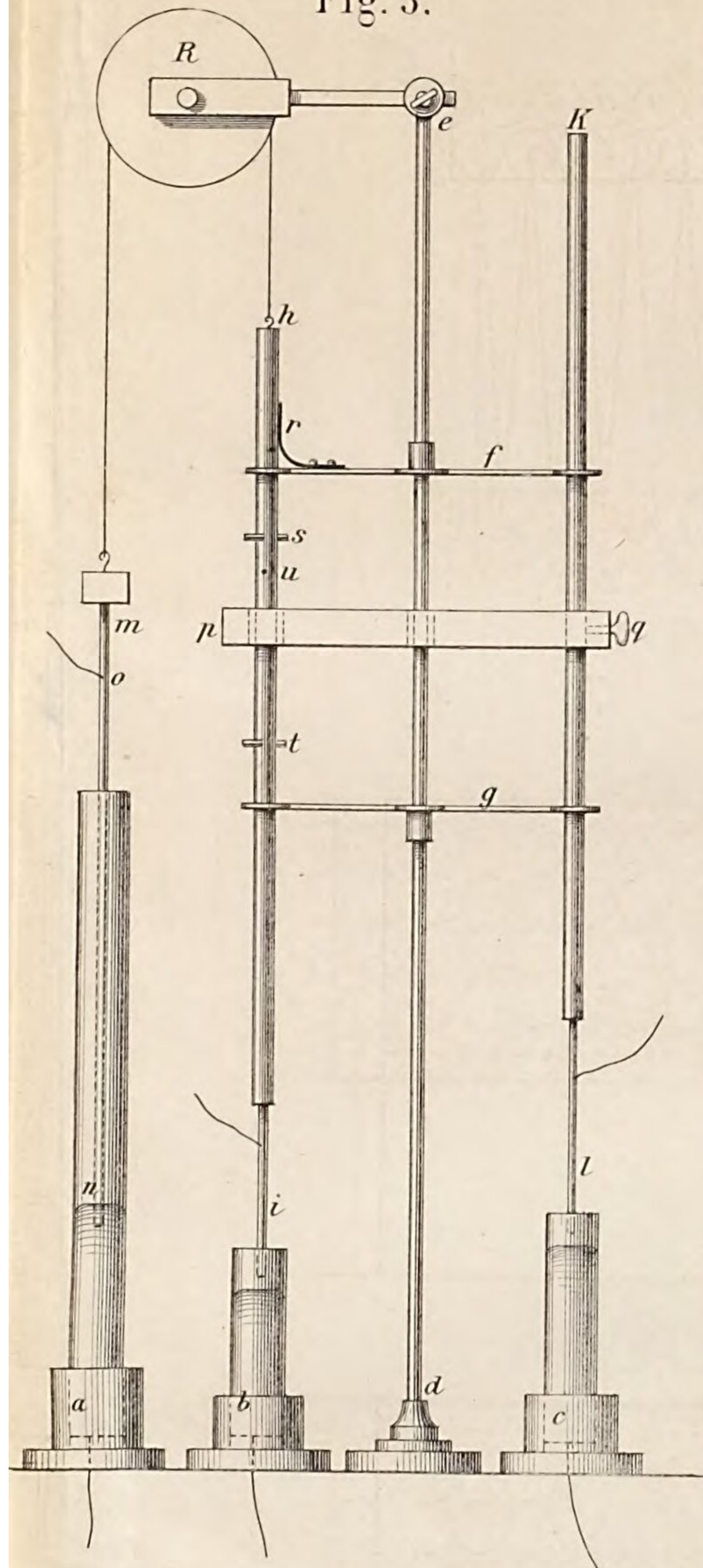


Fig. 4.

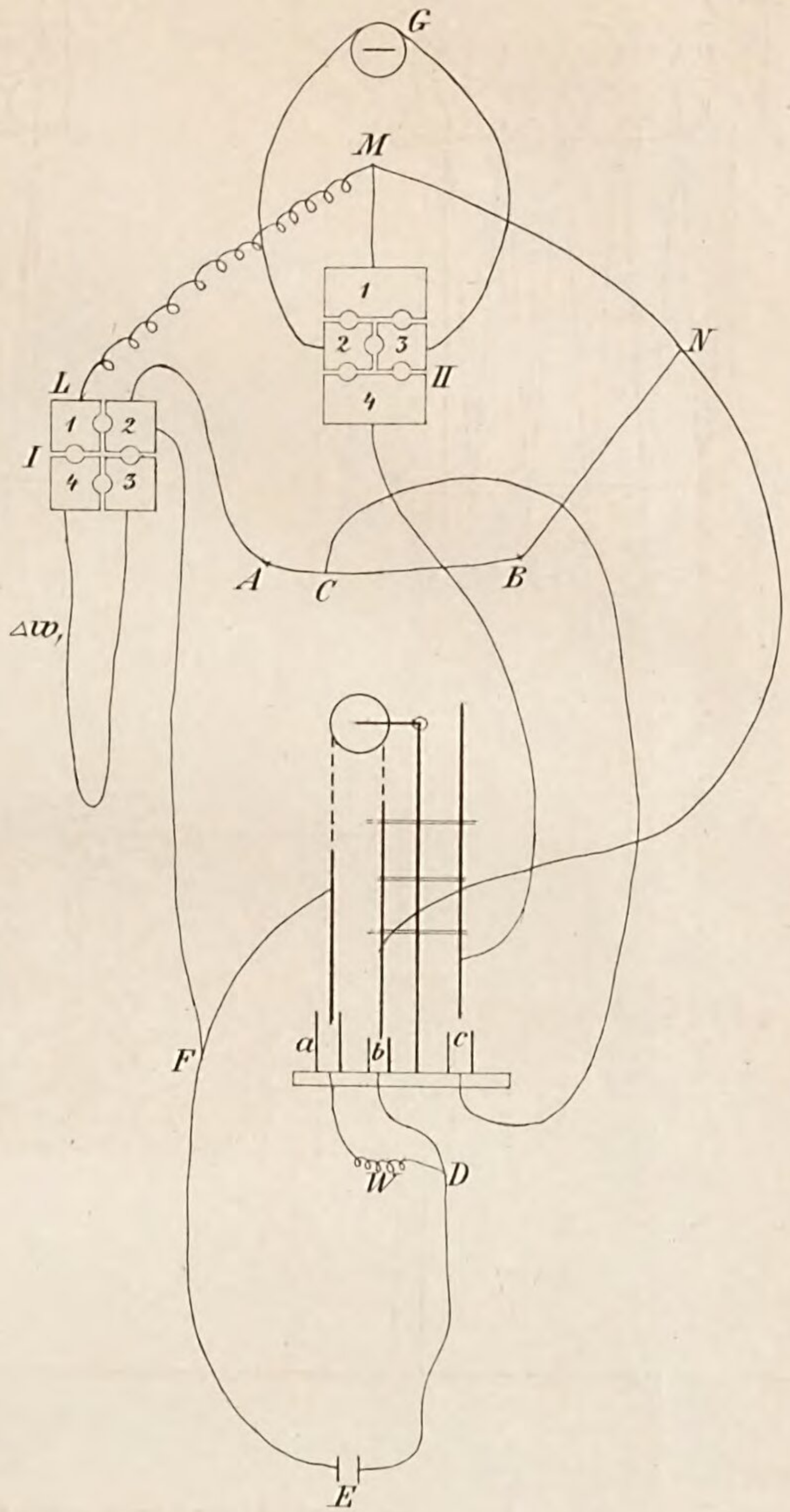


Fig. 5.

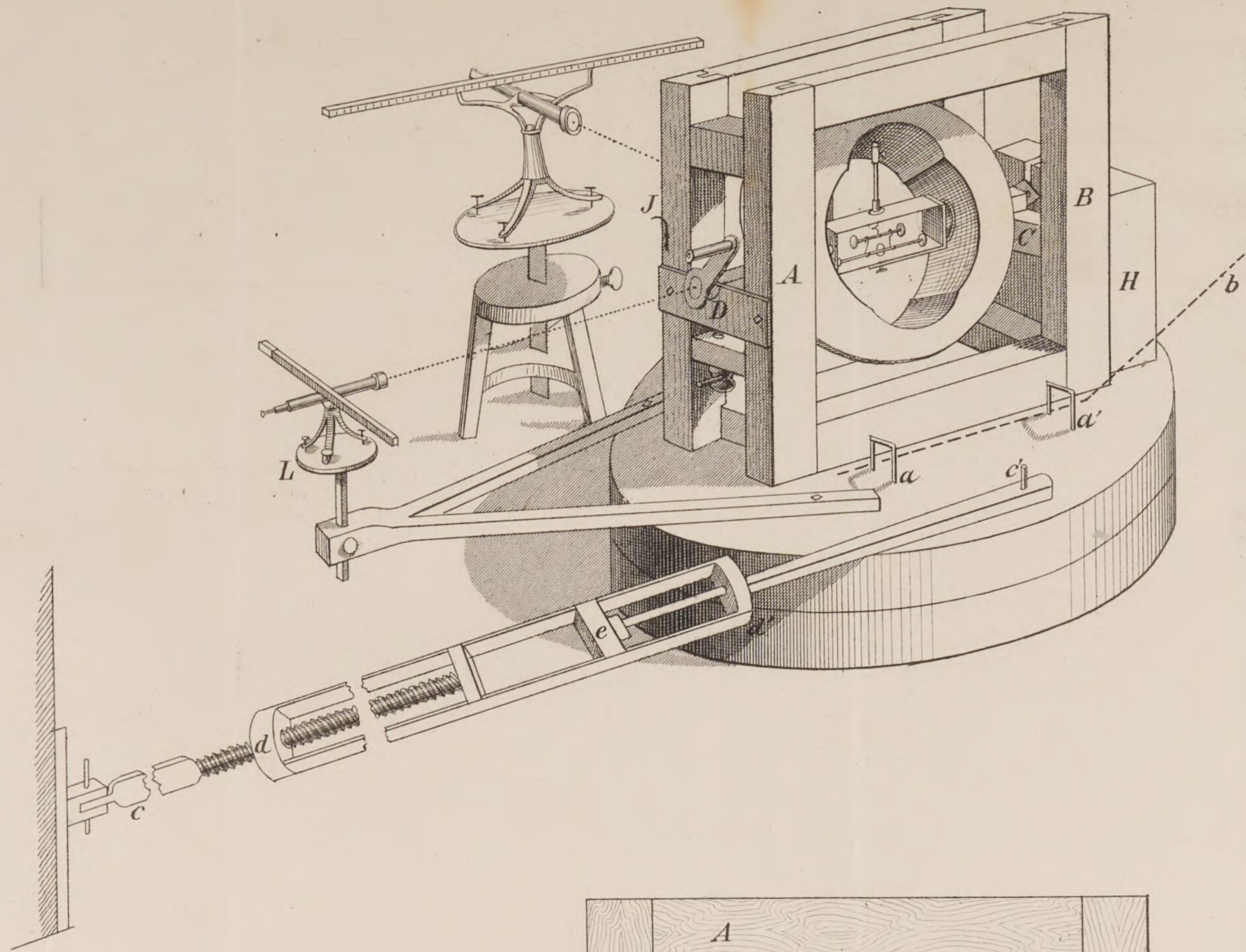


Fig. 7.

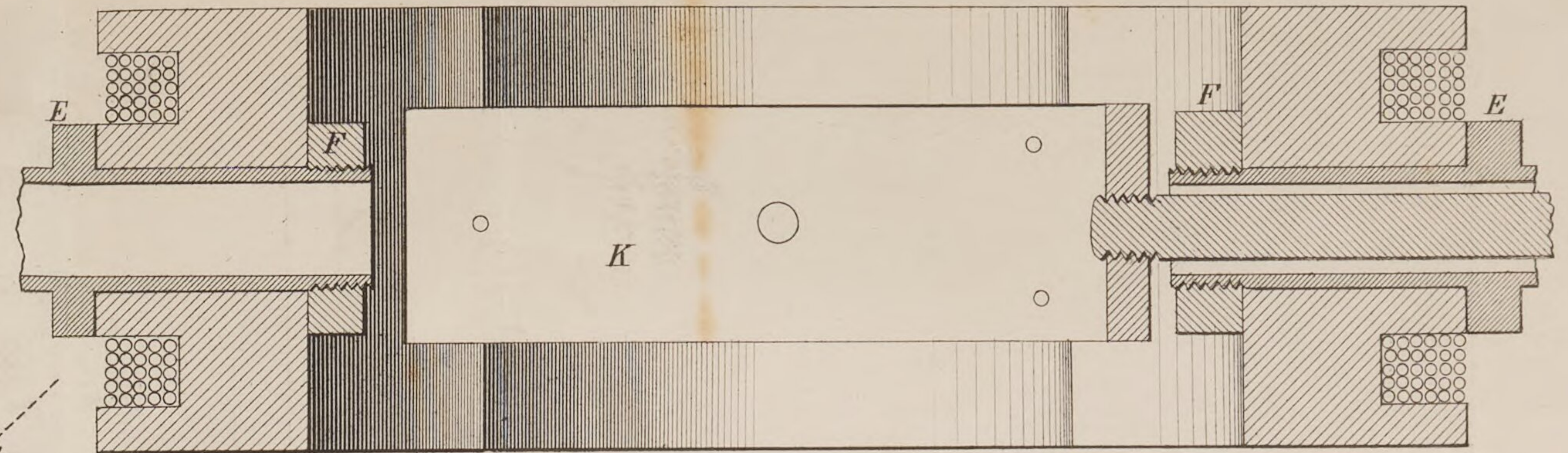


Fig. 8.

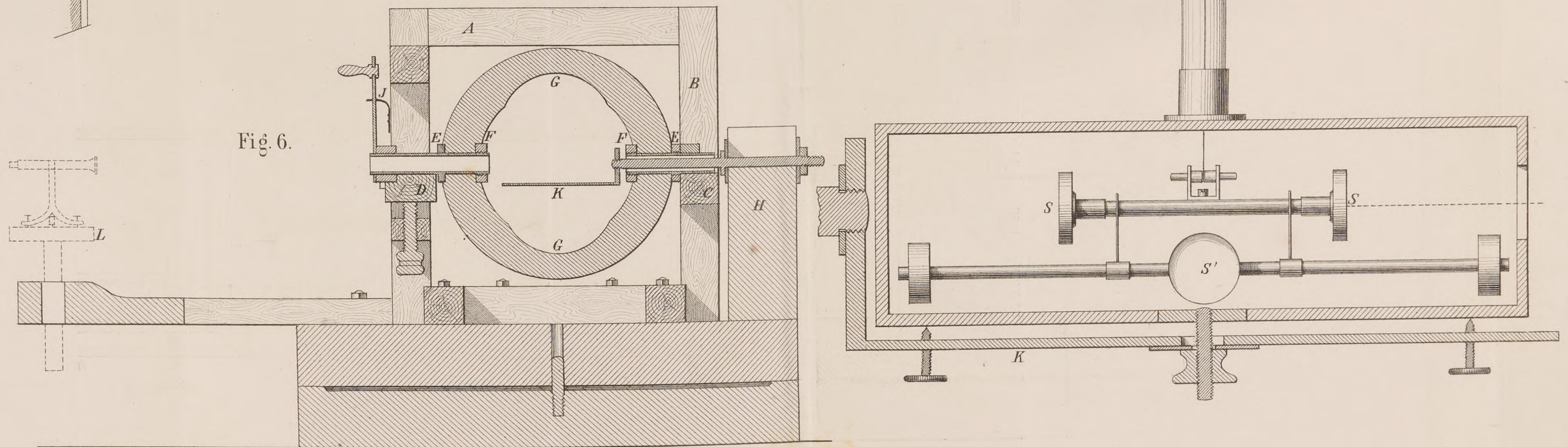


Fig. 7.

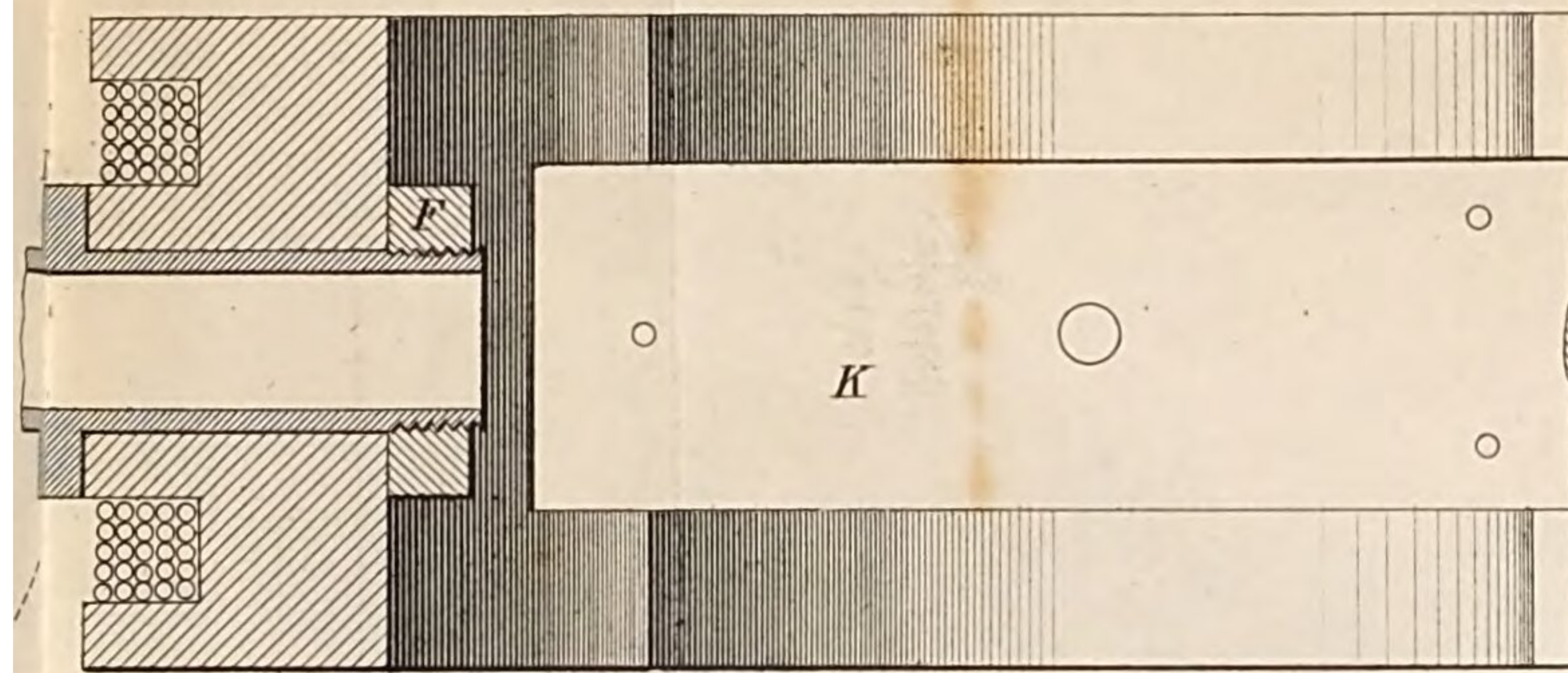
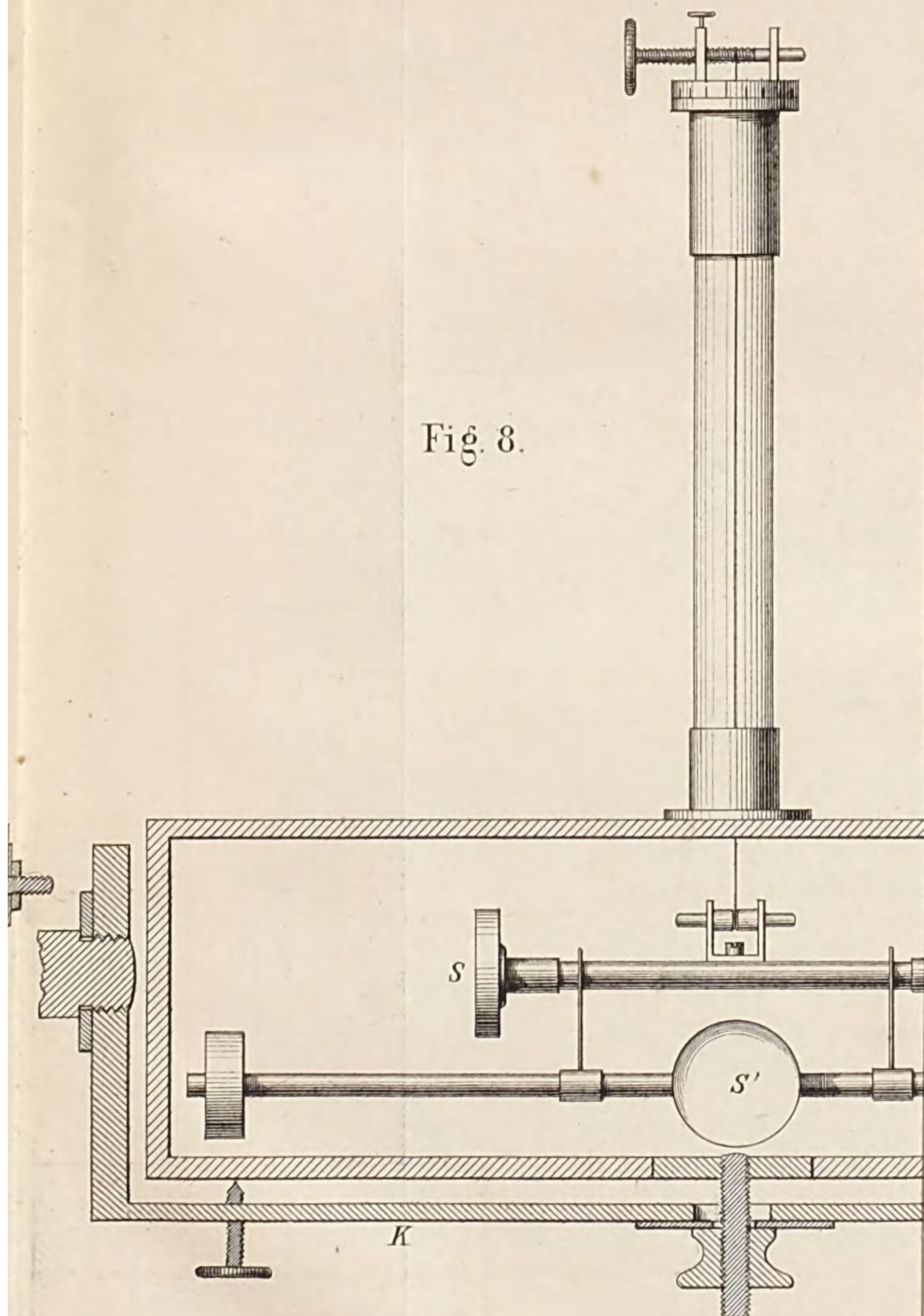


Fig. 8.

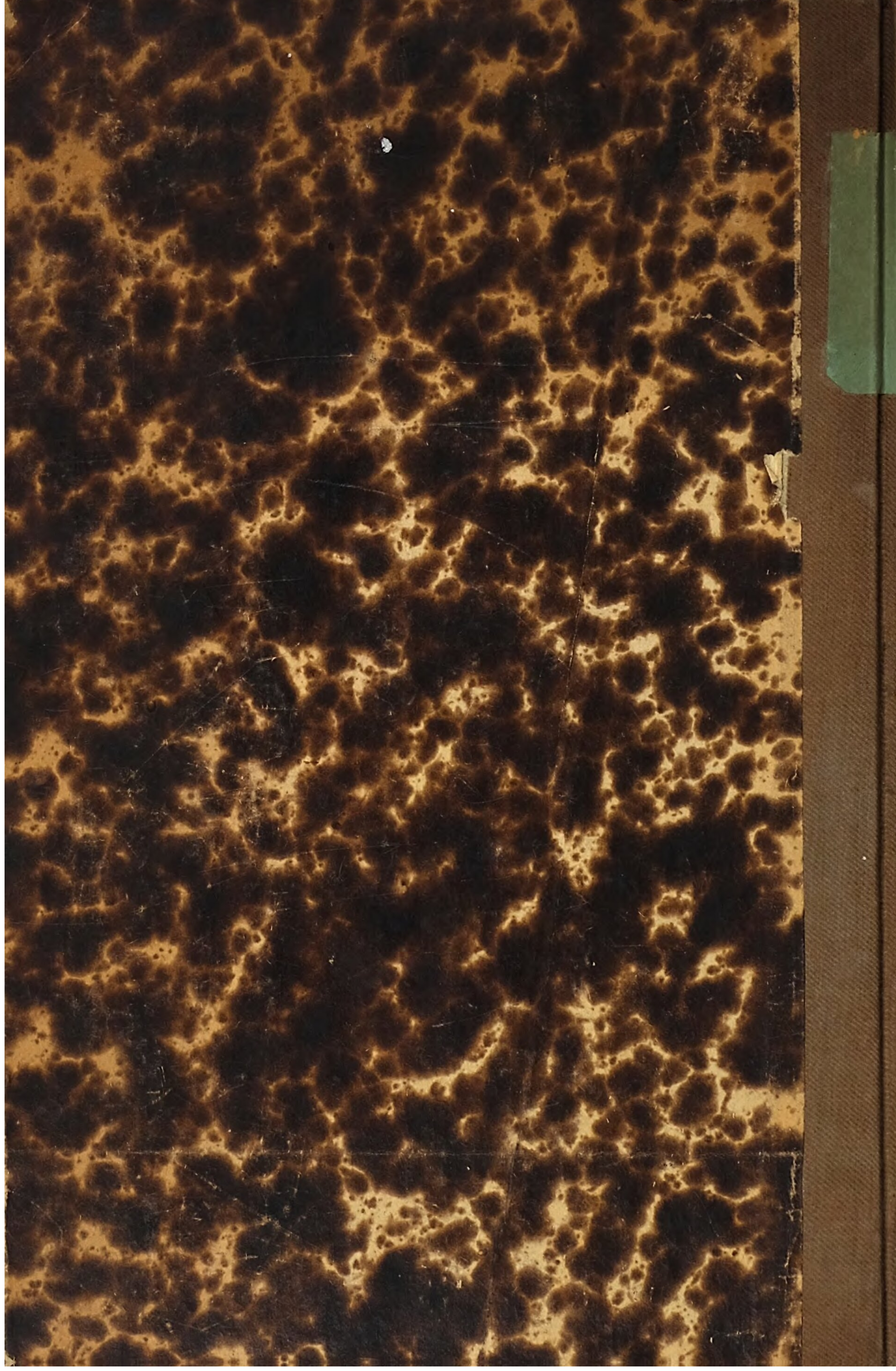


Neuer Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

1882.

- Abel, Niels Henrik**, oeuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. SYLOW et S. LIE. 2 tomes. 4. geh. n. *M* 24.—.
Tome premier [VIII u. 621 S.] contenant les mémoires publiés par ABEL.
Tome second [IV u. 341 S.] contenant les mémoires posthumes d'ABEL.
- Dronke, Dr. Adolf**, Direktor der Realschule I. O. zu Trier, Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung. Unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. BEER und Dr. J. PLÜCKER. [IV u. 97 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.—.
- Durège, Dr. H.**, ord. Professor an der Universität in Prag, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Dritte verbesserte Auflage [X u. 268 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.—.
- Fiedler, Dr. Wilhelm**, Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Mit 16 lithogr. Tafeln. [XVI u. 264 S.] gr. 8. geh. n. *M* 9.—.
- Fuhrmann, Dr. Arwed**, ordentl. Professor am Königlichen Polytechnikum zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Ein Übungsbuch für Studierende der Mathematik, Physik, Technik etc. In zwei Teilen. Zweiter Teil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. [VI u. 222 S.] geh. n. *M* 3.60.
Der I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper [VI u. 138 S.] n. *M* 2.40, erschien 1879 in zweiter Auflage.
- Günther, Dr. Siegmund**, Professor am K. Gymnasium zu Ansbach in Bayern, parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung. [IV u. 99 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M* 2.80.
- Heiberg, Dr. J. L.**, litterargeschichtliche Studien über Euklid. [IV u. 224 S.] gr. 8. geh. n. *M* 5.60.
- Hochheim, Dr. Adolf**, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. geh. in 2 Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. *M* 1.50. B. Auflösungen. [102 S.] n. *M* 1.50. Zusammen *M* 3.—
- Klein, Dr. Felix**, o. ö. Professor der Geometrie a. d. Universität Leipzig, über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. [VIII u. 82 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

- Koehler, Dr. Carl**, über eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen. [32 S.] gr. 8. geh. *M.* 1.—.
- Krazer, Dr. Adolf**, Theorie der zweifach unendlichen Theta-reihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. [VII u. 66 S.] gr. 4. geh. n. *M.* 3.60.
- Milinowski, A.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. Elsass, elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 8.80.
- Netto, Dr. Eugen**, a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Strassburg i. E., Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. [VIII u. 290 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.80.
- Pasch, Dr. Moritz**, Professor an der Universität zu Gießen, Vorlesungen über neuere Geometrie. [IV u. 201 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—.
- Prym, Dr. Friedrich**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristiken-theorie. [VIII u. 112 S.] gr. 4. geh. n. *M.* 6.—.
- Reidt, Prof. Dr. F.**, Oberlehrer am Gymnasium und der höheren Bürgerschule in Hamm, die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VII u. 50 S.] gr. 8. kart. *M.* 1.20.
- Salmon, George**, analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Deutsch bearbeitet von Dr. WILH. FIEDLER, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweite verbesserte Auflage. gr. 8. [XVI u. 508 S.] geh. n. *M.* 11.20.
- Schlömilch, Dr. O.**, Geh. Schulrat, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Dritte Auflage. [VII u. 384 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.60.
- Wüllner, Dr. Adolph**, Professor der Physik an der Kgl. techn. Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Vierte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [VIII u. 849 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10.—.
- Die folgenden Bände des gegenwärtig den ersten Rang einnehmenden ausführlichen Lehrbuchs der Physik werden vorerst noch nicht in neuer Auflage erscheinen. Für die Abnehmer sämtlicher 4 Bände ist daher ein neues Gesamtregister gedruckt worden, welches sich über die 4. Auflage des I. Bandes und die 3. Auflage des II., III. und IV. Bandes erstreckt. Dasselbe wird den Käufern des vollständigen Werkes gratis geliefert.
- Zeuthen, H. G.**, Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. [VI u. 97 S.] gr. 8. geh. *M.* 2.—.



Weber, Heinrich

Der Rotationsinduktor seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung
des Ohm in absoluten Maassen

Leipzig 1882

Phys.sp. 718 k

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11882172-4